La notion de probabilité et la science actuarielle

Rooijen, Jozephus Petrus van

1935

LA NOTION DE PROBABILITÉ
ET
LA SCIENCE ACTUARIELLE

J. P. VAN ROOIJEN

W. 0272.WD

5

LA NOTION DE PROBABILITÉ
ET
LA SCIENCE ACTUARIELLE

VRIJE UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM

LA NOTION DE PROBABILITÉ
ET
LA SCIENCE ACTUARIELLE

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. L. VAN DER HORST, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 18 OCTOBER 1935, DES NAMIDDAGS TE 2 UUR, IN HET GEBOUW DER MAATSCHAPPIJ VAN DEN WERKENDEN STAND, KLOVENIERSBURGWAL 87, TE AMSTERDAM

DOOR

JOZEPHUS PETRUS VAN ROOIJEN
GEBOREN TE NAARDEN

AMSTERDAM — 1935
N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERSMAATSCHAPPIJ

Aan de dierbare nagedachtenis
van mijn Ouders

De gelegenheid, die mij door de voltooiing van dit proefschrift geboden wordt, grijp ik volgaarne aan om een woord van oprechten dank te richten tot allen, die mijn academische vorming hebben geleid of op andere wijze bij de bearbeiding van deze dissertatie behulpzaam zijn geweest.

Allereerst richt ik mij tot U, Oud-Hoogleeraren, Hoogleeraren en Lectoren der Utrechtsche philosophische faculteit. Hoewel een bijzondere omstandigheid het regelmatig volgen van Uw lessen doorgaans in den weg stond, nochtans mag ik met dankbaarheid gewagen van den steun en medewerking, die ik van U allen mocht ondervinden. Het worde mij vergund om een persoonlijk woord van erkentelijkheid jegens sommigen uit Uw midden, wier toegewijde hulp mij menigmaal op aangename wijze heeft verrast, achterwege te laten; de verzekering, dat hun vriendelijke toegenegenheid en raadgevingen een duurzamen invloed op mij hebben uitgeoefend en deswege nimmer in mijn herinnering zullen vervagen, mag echter in geen geval ontbreken.

Bijzonderen dank ben ik U verschuldigd, Hooggeleerde VAN HAAFTEN, Hooggeachte Promotor. Altoos zal ik het als een groot voorrecht blijven beschouwen, dat ik Uw bezielende en systematisch ingekleede voordrachten over de elementen van de Verzekeringswetenschap heb mogen volgen. Daarnaast is de persoonlijke omgang met U van onschatbare beteekenis gebleken, aangezien Uw heldere kennis en onvermoeide ijver mijn belangstelling voor actuarieelen arbeid hebben opgewekt, terwijl door Uw gewaardeerde bemiddeling mijn intrede in den kring van vakgenooten vergemakkelijkt werd. Voornamelijk heeft echter de bereidwilligheid, die ik bij de bewerking van dit proefschrift van U mocht ondervinden, en de hulpvaardigheid, waarmede Gij mij steeds zijt tegemoet gekomen, een diep gevoel van erkentelijkheid gewekt. Ik prijs mij gelukkig, dat zich thans een gelegenheid voordoet om openlijk aan mijn dankbaarheid uiting te geven.

Ook jegens U, Zeergeleerde DE CHATELEUX, reken ik mij hoogelijk verplicht. Er is van geenerlei overdrijving sprake, wanneer ik gewaag van de bewondering, die Uw schoone vertaling van dit proefschrift in het Fransch bij mij heeft gaande gemaakt. Bovendien gedenk ik met groote dankbaarheid aan de vruchtbare samensprekingen, die met de vertaling vergezeld gingen, en waardoor op vele punten verbeteringen konden worden aangebracht. De zorgvuldigheid en de nimmer verflauwende geestdrift, waarmede Gij de op U genomen taak hebt volbracht, konden zelfs mijn stoutste verwachtingen overtreffen. Het is mij dan ook een behoefte om U de verzekering te geven, dat Uw belangelooze medewerking bij de bearbeiding van deze dissertatie bij mij steeds in levendige herinnering zal blijven.

Te dezer plaatse mag ook een woord van dank aan de maatschappij van levensverzekering, de „Utrecht", niet ontbreken. Het deed mij een groot genoegen, dat ik van haar kostbare en uitnemend verzorgde bibliotheek een en andermaal een ruim gebruik mocht maken.

Tenslotte betuig ik mijn erkentelijkheid jegens den heer MARKUS, ambtenaar bij de Hollandsche Societeit van Levensverzekeringen, die mij bij de correctie van de drukproeven zijn volle medewerking heeft betoond.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

Si l'on compare les articles parus au cours des dernières périodes décennales dans les revues actuarielles à ceux publiés dans ces mêmes revues au tournant du siècle, on ne peut manquer d'arriver à la constatation d'une différence très marquée. En effet, depuis 1900 environ, nous voyons les problèmes qui reviennent à évaluer au moyen de l'analyse combinatoire certaines probabilités, et qu'on rencontrait jusqu'alors assez régulièrement à côté des questions touchant les mathématiques des assurances proprement dites, devenir de plus en plus rares; si bien qu'à l'heure actuelle les auteurs traitent à peu près exclusivement des problèmes en liaison directe avec les mathématiques des assurances et les branches connexes [1]).

Il est certain que pour chercher une explication péremptoire au fait que nous venons de signaler, il faut s'engager dans diverses voies. On peut faire remarquer, par exemple, qu'au tournant du siècle l'examen critique des concepts de leur science suscitait, plus que jamais, l'intérêt des mathématiciens. On comprend aisément que le calcul des probabilités, particulièrement riche en notions confuses, n'ait point échappé à pareil examen, et qu'en conséquence la question de sa portée pratique, souvent d'ailleurs l'objet d'attentes exagérées, connut dès lors une période d'indifférence presque complète. Il est évident que les auteurs des dissertations sur les bases du calcul des probabilités, mélanges de philosophie et de mathématiques pures, ne présentaient que rarement leurs articles aux revues actuarielles en raison du caractère plutôt technique de celles-ci. Que l'absence d'articles semblables n'ait frappé que fort peu les lecteurs des revues actuarielles, cela est dû sans doute au fait qu'en même temps le développement des mathématiques des assurances prit un grand essor.

Le changement à constater dans le contenu des revues actuarielles doit cependant s'expliquer surtout, ce nous semble, par le doute

---

[1]) Le *Giornale dell' istituto italiano degli attuari* fait ici exception.

croissant quant à la légitimité — posée longtemps en quelque sorte comme un postulat — d'appliquer les résultats du calcul des probabilités à la science des assurances. Ce doute a fortement contribué, on le conçoit sans peine, à augmenter l'intérêt pour la question de savoir jusqu'à quel point les principes des mathématiques des assurances répondent aux conditions exigées par le calcul des probabilités. Plusieurs auteurs déjà se sont effectivement occupés de la solution de cette question.

Notre but, dans l'étude qui va suivre, a été de préciser la signification que le calcul des probabilités présente pour la science de l'actuaire.

Celui qui cherche à s'expliquer comment les mathématiciens du siècle précédent aient pu admettre sans hésitation la légitimité d'appliquer le calcul des probabilités, dans toute son étendue, à la science des assurances, ne doit pas oublier qu'à l'époque le calcul des probabilités jouissait d'une grande faveur comme procédé permettant de tirer du passé des conclusions pour l'avenir. Grâce à ce calcul, on croyait les mathématiciens à même de tirer de leurs opérations de dénombrement des prévisions presque certaines en ce qui concerne les phénomènes sociaux. Les sentences des jurys, les dépositions des témoins, les résultats d'entreprises spéculatives, et quantité d'autres questions, seraient dépouillées de leur caractère fortuit par les savants versés dans le calcul des probabilités; on alla même jusqu'à appliquer cette discipline à des événements nullement aléatoires, par exemple au lever du soleil et à d'autres phénomènes faisant avec lui partie de ce qu'on appelait le domaine des „contingences physiques". On sait la suggestion que les travaux de A. QUETELET ont exercé à cet égard [1]).

Faut-il s'étonner alors que le calcul des probabilités ait envahi le terrain des assurances sans rencontrer de résistance? Evidemment non. Remarquons d'ailleurs que cette facilité de pénétration prolonge bien la ligne tracée par le passé; dès leurs premiers balbutiements, la science des assurances et la théorie des chances ont fait route ensemble.

---

[1]) Cf. par exemple son ouvrage bien connu *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale* (Paris, 1835).

Dans les décisions prises par le deuxième Congrès d'actuaires (Londres, 1898), relativement à un système de notation universelle pour la science actuarielle, nous voyons une certaine sanction de la conception que nous venons de reproduire. En effet, la notation en question a créé un système complet de symboles pour les probabilités de vie et de décès, et de ce fait les assises des mathématiques des assurances ont reçu officiellement une tournure de sens bien déterminé. Sans doute, ce n'est pas ici le lieu de mettre, d'une façon générale, les avantages et les inconvénients de la notation actuarielle en balance; mais ce qu'il importe de bien faire remarquer, c'est que plusieurs hommes compétents considèrent les semences fournies par la notation universelle comme de qualité médiocre, car l'arbre qui en est sorti leur déplaît à plus d'un titre. Il est vrai que la présence de symboles pour les chances dans la notation universelle doit être interprétée, non comme une décision de principe, mais plutôt comme une simple confirmation internationale du fait que l'application du calcul des probabilités à leur science avait alors à peu près l'approbation de tous les actuaires. Aussi les discussions qui précédaient la fixation de la notation, portaient-elles uniquement sur des points de détail; l'introduction des symboles pour les chances ne rencontrait aucun obstacle. Et quoique cette concordance de vues se soit relâchée depuis, le monument historique qu'est la notation universelle, constitue toujours une entrave à la propagation d'opinions s'écartant des bases posées par elle.

Nous nous proposons de rechercher la part qu'il convient d'attribuer au calcul des probabilités dans une théorie mathématique des assurances sur la vie. Dans la poursuite d'une telle tâche, il importe évidemment d'examiner le problème posé avant tout dans ses principes caractéristiques. Si nous nous permettons cependant de demander également l'attention pour le côté technique et pour le côté didactique de la question, c'est que les motifs allégués en vue de bannir le calcul des probabilités du terrain des mathématiques des assurances présentent une divergence marquée. Certains auteurs sont d'avis que les bases de la science actuarielle ne répondent pas aux conditions que l'application du calcul des probabilités réclame; d'autres, négligeant cette question de compatibilité, condamnent l'introduction des probabilités, du moins dans une théorie élémentaire, parce qu'ils redoutent de voir surgir ainsi un édifice encombré de complications superflues. Ce dernier point de vue est celui de plusieurs actuaires hollandais; et ceci explique que, conformément à la décision prise en 1926 par la Vereeniging voor Verzekeringswetenschap, le jury chargé de faire passer chaque année l'examen institué par cette société pour l'obtention du certificat relatif aux éléments de la science actuarielle, évite les questions, les problèmes relatifs aux jeux notamment, dont la solution n'exige aucune connaissance en matière d'assurances.

Quoique le titre de notre étude puisse faire supposer le contraire, notre exposé, loin d'impliquer l'examen de l'application du calcul des probabilités aux mathématiques des assurances en général, se limitera à l'assurance sur la vie. Pareille restriction est légitime, car, comme nous le montrerons dans la suite, le pivot de nos développements relatifs à l'assurance sur la vie pourra servir à fortiori aux branches maladie, invalidité et dommage.

Il ne peut être contesté que le problème dont nous allons nous occuper se rattache à la partie descriptive de la statistique. L'occasion de mettre ceci en relief se présentera fréquemment. Nous aurons cependant soin de nous borner à de simples remarques — placées par ci, par là — car une étude critique des méthodes de la statistique descriptive dépasserait de beaucoup le cadre de notre écrit. D'un autre côté, il sera de toute nécessité de faire entrer dans nos considérations la statistique de la mortalité. En effet, celle-ci, base des mathématiques des assurances sur la vie, possède pour notre examen une signification capitale.

La question des rapports entre les mathématiques des assurances et le calcul des probabilités a été fréquemment mise à l'ordre, dans les littératures allemandes et scandinaves notamment. C'est à cause de cela qu'un historique, précédant notre examen proprement dit, nous a paru désirable. Ainsi, le deuxième chapitre donnera un résumé succinct des principales publications qui traitent le sujet, soit isolément, soit dans ses rapports avec des problèmes connexes. Notre but n'est pas de donner un résumé complet; nous voulons seulement faire ressortir, aussi objectivement que possible, combien les idées divergent, se contredisent même, dès qu'on passe d'un auteur à un autre. Nous verrons aussi que certains auteurs sont arrivés, en dépit de la différence des voies suivies, à une même conclusion finale.

Le troisième chapitre constitue un exposé sommaire des bases du calcul des probabilités; il comprend une tentative de mettre en lumière que la notion de probabilité offre les caractères des abstractions mathématiques. Dans cet ordre d'idées, il ne sera pas permis de passer sous silence la définition synthétique de VON MISES et ses partisans, puisque plusieurs voient dans celle-ci une base indispensable pour élaborer la statistique, en général, et les mathématiques des assurances, en particulier.

La statistique de la mortalité, et les problèmes s'y rattachant, se trouvent examinés au quatrième chapitre. Il sera surtout nécessaire d'approfondir la question, déjà posée maintefois, de savoir dans quelle mesure il est légitime de tirer d'une concordance plus ou moins serrée entre les expériences relatives à la mortalité, d'une part, les conséquences déduites de la théorie de la dispersion de LEXIS, d'autre part, des conclusions se rapportant au caractère distinctif des chances de décès. En outre, il est important de rechercher comment il faut interpréter les nombres d'une table de mortalité et les quotients obtenus avec ces nombres.

Que les résultats fournis par un tel examen exigent des modifications dans la méthode usagée jusqu'à présent pour exposer les éléments des mathématiques des assurances, c'est ce qui fera l'objet du cinquième chapitre. A cet effet, nous partirons de la supposition provisoire que l'assureur calcule ses primes et ses réserves mathématiques en employant des bases idéales; les écarts seront envisagés ensuite, car notre manière de considérer les choses trouve sa raison d'être également dans la technique de l'industrie des assurances, qui demande des marges de sécurité et se détache par cela même intentionnellement des principes réclamés par la théorie.

Le sixième chapitre constitue un essai de rechercher jusqu'à quel point le fait que les théories actuarielles plus approfondies n'ont trouvé que de rares applications, s'explique par la grande place que ces théories ont réservée aux probabilités; le problème tant controversé du risque y sera examiné quant aux avantages qu'il offre pour la pratique. Sous ce rapport, l'ajustement analytique des tables de la mortalité demandera également l'attention.

CHAPITRE II.

Historique.

Les publications qui traitent, plus ou moins expressément, les liens intimes entre le calcul des probabilités et les mathématiques des assurances, sont en si grand nombre, et de nature tellement différente, qu'il est impossible de les examiner toutes, même superficiellement. Le but que nous visons dispense d'ailleurs d'un exposé détaillé. En effet, par le présent chapitre nous voulons seulement mettre en évidence le point central de notre étude et ainsi il suffit de faire défiler, en observant autant que faire se peut l'ordre historique, les écrits qui ont attiré suffisamment l'attention générale pour provoquer des recherches plus approfondies.

Parmi les auteurs qui ont soumis l'application pratique du calcul des probabilités à une étude critique, nous rencontrons tout d'abord Fries [1]. Il s'élève principalement contre l'application immodérée des probabilités à postériori et le lecteur concevra aisément son refus de souscrire sans réserves à l'introduction des probabilités dans les questions d'assurance. Selon lui, les observations relatives à la longévité humaine ne doivent pas, en principe, être employées pour mettre la mise de l'assuré en concordance avec la valeur probable du capital contracté, du moins dans le cas d'un groupe restreint d'assurés. En outre, il prétend nettement que le théorème des probabilités composées conduit, en ce qui concerne les assurances sur plus d'une tête, à des conclusions erronées [2].

Les considérations consacrées par Bremiker [3] au problème des bases des mathématiques des assurances sont extrêmement importantes. Il souligne tout d'abord le fait que le calcul des primes, et de même celui des réserves mathématiques, repose sur la moyenne

---

[1] J. F. Fries: *Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Braunschweig, 1842).

[2] L.c. p. 189—198.

[3] C. Bremiker: *Das Risiko bei Lebensversicherungen* (Berlin, 1859).

arithmétique. Or, si la théorie des moindres carrés permet de conclure à la légitimité de se servir de cette moyenne ou, en d'autres termes, nous autorise à prendre le calcul des probabilités comme point de départ, il est plus exact, selon BREMIKER, d'introduire le principe de la moyenne arithmétique comme postulat et d'interpréter ensuite au moyen du calcul des probabilités les résultats obtenus. De là sa thèse, formulée sans ambiguité, que le calcul des probabilités doit être qualifié, non seulement comme superflu, mais encore comme prêtant à confusion, lorsqu'il s'agit de calculer des primes et des réserves mathématiques. D'un autre côté, il voyait dans la théorie des moindres carrés le moyen tout indiqué pour développer la notion du risque mathématique.

Selon BREMIKER, il convient d'attribuer, sur le terrain des assurances sur la vie, beaucoup d'importance à l'analyse de la notion du risque mathématique. En effet, ne voyant dans les nombres fournis par une table de mortalité que des moyennes d'un grand nombre de décès, il fut tout naturellement amené à l'affirmation que les écarts par rapport à ces moyennes ne peuvent être que considérables lorsqu'on applique les données de la table de mortalité à des groupes composés de peu de têtes.

Certains d'entre les auteurs plus récents, WITTSTEIN [1]) et HATTENDORFF [2]) notamment, ont donné aux nombres d'une table de mortalité une autre interprétation, de contours plus nets, en tant qu'ils voyaient dans ces nombres les valeurs les plus probables de grandeurs inconnues. Ils faisaient consister le problème à résoudre dans la recherche, moyennant la loi des grands nombres, des erreurs probables.

L'oeuvre de LEXIS doit être considérée comme fondamentale pour l'étude de la statistique. Aussi sa théorie nous servira-t'elle de fil conducteur dans notre étude relative au problème de la mortalité. Faisons remarquer dès à présent qu'il faut voir dans le concept de

---

[1]) Th. Wittstein: *Mathematische Statistik und deren Anwendung auf National-Oekonomie und Versicherungs-Wissenschaft* (Hannover, 1867).

[2]) K. Hattendorff: *Ueber die Berechnung der Reserven und das Risiko bei der Lebensversicherung.* Masius' Rundschau, Jahrg. XVIII (1868).

dispersion normale, notion due à LEXIS[1]), la caractéristique qu'une série statistique doit présenter pour qu'elle soit gouvernée par le schéma de BERNOULLI. Des recherches effectuées sans relâche, aussi bien par ses adhérents que par LEXIS lui-même, ont montré que des phénomènes statistiques se rapportant à la vie sociale, à l'exception peut-être du rapport du nombre des naissances masculines au nombre des naissances féminines, n'offrent jamais le cas de la dispersion normale.

LEXIS remarqua déjà lui-même que la majorité des phénomènes statistiques relèvent d'états variables avec le temps et conduisent à cause de cela à des séries d'observation symptomatiques. Dans le cas où la variation se fait principalement dans un sens déterminé, on se trouve en présence des séries appelées séries évolutoires; on peut même, abstraction faite des recherches s'y rapportant, et sans crainte de se tromper, ranger la mortalité humaine dans cette dernière catégorie, puisque le développement de la prévoyance sociale et les progrès de l'hygiène font décroître de manière systématique la mortalité. Il faut rester dans l'expectative quant à la question de savoir jusqu'à quel point la dépression actuelle de la vie économique sera suivie d'un changement plus ou moins accentué en sens opposé.

C'est surtout à VON KRIES[2]) que nous devons les conséquences que la théorie de LEXIS entraîne pour les phénomènes statistiques de la vie sociale. Après avoir mis en évidence que la statistique comprend quantité de cas où la fréquence d'un phénomène déterminé revête de façon indéniable une régularité très prononcée, VON KRIES se pose la question de savoir, si parmi les rapports numériques rencontrés dans le domaine de la vie sociale, il en existe qui méritent effectivement le qualificatif de probabilité. Pour que la réponse soit affirmative, il faut que l'observation donne lieu à des séries à dispersion normale, donc de même nature que celles fournies par un jeu de hasard élémentaire dont les différents cas pouvant se présenter sont à fort peu près également vraisemblables. Etant donné que des recherches étendues, effectuées par LEXIS et par d'autres

---

1) W. Lexis: *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft* (Freiburg i.B., 1877).

2) J. von Kries: *Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung.* Zweiter, mit einem neuen Vorwort versehener Abdruck (Tübingen, 1927).

statisticiens, ont montré que de semblables séries se constatent seulement dans l'étude du rapport des naissances des deux sexes, VON KRIES se croit autorisé à conclure que „in keiner Beziehung eine numerische Wahrscheinlichkeit für dieses oder jenes Geschehen angegeben werden kann" [1]).

On comprend que VON KRIES s'est fait un devoir d'expliquer son point de vue, si contraire à l'admiration presque générale dont jouissait le calcul des probabilités comme adjuvant de la statistique mathématique. Il dit d'abord que le grand nombre de cas examinés a révélé des rapports statistiques sensiblement stables; pour faire une telle constatation, point besoin d'impliquer dans la question la notion de probabilité mathématique. D'un autre côté, il a signalé expressément un danger dont plusieurs ont été dupes. Si la pratique peut souvent tabler sur des fréquences reconnues comme suffisamment stables, il faut se garder de faire intervenir le calcul des probabilités — la théorie de la population donnée par LAPLACE peut servir ici d'exemple — d'une manière prématurée. Il importe de se demander d'abord si les conditions du problème à résoudre ne s'écartent pas trop de celles réclamées par le calcul des probabilités.

En ce qui concerne la pratique de l'industrie des assurances, VON KRIES a attiré l'attention sur les points suivants. D'abord les Compagnies d'assurances sur la vie ont grand intérêt à se faire une idée assez exacte de la proportion future des décès suivant les âges, mais l'assureur demandant la valeur numérique de la probabilité de décès d'un assuré déterminé prouve simplement son incapacité de comprendre le terme de probabilité dans son sens scientifique. Puis VON KRIES juge inutile d'entreprendre des calculs numériques en vue de déterminer les probabilités des différents écarts par rapport à la moyenne fournie par le passé. Afin de motiver ce dernier point de vue — opinion fort téméraire pour l'époque — il fait remarquer qu'une Compagnie d'assurances sur la vie, bien loin de placer sa confiance dans des développements mathématiques, fera preuve de sagesse en pratiquant avec circonspection une méthode de tâtonnement pour fixer le montant de sa réserve de risque.

C'est dans une étude étendue et richement documentée que WAGNER a examiné la concordance entre les bases de la théorie

[1]) L.c. p. 237.

mathématique des assurances et les conditions posées par le calcul des probabilités [1]). Bien que l'enchaînement des idées y soit souvent d'une logique parfaite, cet auteur a vu son travail vivement critiqué de la part des plus distingués d'entre ses contemporains. Ceci nous engage à nous arrêter aux considérations de WAGNER.

Comme le titre de sa publication le fait présumer, WAGNER donne d'abord son attention aux diverses théories du risque parues au cours de la seconde moitié du siècle précédent, soit dans les revues, soit sous forme brochurée. Cette partie ne nous intéresse qu'en tant que le problème de la mortalité s'y trouve confronté avec le calcul des probabilités; nous laissons donc là le reproche refusant à WAGNER, qui aurait mal saisi la véritable pensée des auteurs, le droit de se poser en critique des travaux analysant la notion de risque. Des conclusions de WAGNER nous tirons la seule conséquence que les auteurs cités par lui ont basé leurs théories sur une loi de mortalité fictive, et nous comprenons fort bien que WAGNER condamnait leur façon d'agir. Nous avons cependant la conviction que ses objections auraient présenté plus de poids s'il n'avait pas placé la technique des assurances au centre de ses considérations. Certes, nul ne peut contester que cette technique se détourne résolument des bases théoriques, et il est clair que les mathématiques des assurances doivent tenir compte de ce fait. Mais tout le monde sait qu'en matière de recherches scientifiques, il faut bien recourir à une simplification provisoire des données — de crainte de se perdre sans cela dans un labyrinthe inextricable — quitte à reviser finalement les résultats ainsi obtenus par un retour aux points d'abord laissés de côté. Dans le domaine des mathématiques des assurances pareille méthode s'impose certainement. Malheureusement WAGNER n'a pas tenu compte de cette vérité et c'est à cause de cela, sans doute, que la critique exercée par lui n'a pas donné toute sa mesure.

La deuxième partie de son écrit traite des lois de la mortalité et des principes de la statistique. Pour intéressantes que soient les considérations y contenues, elles n'en présentent pas moins le même inconvénient que la première partie. Cette fois, WAGNER débute par la remarque que la mortalité humaine subit l'influence, non seulement

---

1) K. Wagner: *Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung* (Jena, 1898).

de l'âge, mais encore de quantité d'autres facteurs, variables avec le temps, et ne saurait par suite trouver son expression entière sous la forme d'une loi universelle, valable en tout temps et en tout lieu. Sans doute, WAGNER a dû reconnaître la possibilité de déterminer les constantes d'une loi de mortalité, spécialement dans le cas de la formule de GOMPERTZ-MAKEHAM, de manière que celle-ci s'accorde pour un espace de temps limité assez bien avec les chiffres fournis par la statistique; mais ceci ne porte aucune atteinte au principe qui sert de guide aux raisonnements de WAGNER. En effet, un phénomène se déroulant sous l'influence prépondérante de facteurs qui convergent à le faire évoluer dans un sens déterminé, ne saurait se présenter à l'observateur avec la régularité d'une loi naturelle. La supposition de WAGNER, qui voyait dans l'attachement opiniâtre à l'idée de l'existence d'une loi régissant la mortalité une survivance du rationalisme du dix-huitième siècle, nous paraît fort acceptable.

Il ne faut pas conclure de ce qui précède que WAGNER ait contesté les avantages que la loi de GOMPERTZ-MAKEHAM présente en tant que loi approximative; la moindre allusion à la „law of uniform seniority" suffirait déjà à dépouiller une telle contestation de toute valeur. Ce que WAGNER croyait devoir blâmer, c'est la façon dont ses contemporains interprétaient, ouvertement ou non, nombre des résultats fournis par l'application de cette loi; il désapprouvait tout particulièrement les motifs de ceux qui voyaient dans la théorie des moindres carrés le procédé sans pareil pour ajuster les tables de mortalité.

Il faut voir dans l'écrit de WAGNER un acte d'accusation dressé contre le point de vue dogmatique qui reconnaît d'emblée la légitimité de fonder la statistique, et plus spécialement les problèmes posés par la mortalité, sur le calcul des probabilités. L'argumentation de WAGNER trouve son point culminant dans la phrase catégorique: „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherung haben innerlich nichts miteinander zu schaffen und der ersteren ist in der Statistik eine gegen bisher wesentlich andere, neue Aufgabe zugewiesen" [1]). Que WAGNER ait insuffisamment consolidé sa conclusion, pourtant d'une grande portée, nous n'en disconvenons pas. Raison de plus de faire de la conclusion de WAGNER l'objet d'un examen scrupuleux

[1]) L.c. p. 154—155.

WAGNER a eu la satisfaction de voir ses vues, à l'exception de quelques points d'importance secondaire, partagées par LANDRÉ [1]. Ce théoricien éminent était d'avis, lui aussi, que les tables de mortalité ne méritent qu'une confiance limitée, et que le recours aux règles du calcul des probabilités trouve sa source principale dans des considérations d'ordre pratique. De plus, il ne contestait pas que le développement donné au concept de risque mathématique offre un intérêt plutôt scientifique. En ce qui concerne le problème de l'ajustement des tables de mortalité, il a fait remarquer que l'appel aux moindres carrés s'explique ici surtout par le désir de donner à l'ensemble des valeurs observées une allure pas trop capricieuse; il est d'autre part évident qu'un tel résultat ne peut être obtenu qu'en sacrifiant plus ou moins les exigences d'une reproduction fidèle à la réalité.

Monsieur PEEK a fait entendre un tout autre son de cloche [2]. Le titre qu'il a donné à sa thèse du doctorat, nous instruit déjà de son adhésion à ce que nous avons appelé plus haut le point de vue dogmatique, et, dans une préface, il informe le lecteur que ses efforts se concentreront sur la question de savoir si les fréquences empruntées à la mortalité humaine sont vraiment assimilables à des probabilités mathématiques. Cette question reçoit chez lui une réponse affirmative parce qu'il croit la vie humaine régie par une foule de causes indépendantes les unes des autres. Cet affirmation qui revient à mettre les problèmes de la mortalité au même niveau que les jeux de hasard pur, est présentée encore, plus amplement, sous forme d'une hypothèse: la durée de la vie humaine se laisse considérer comme une fonction des éléments déterminant la constitution de l'homme, et aussi de l'action que chaque individu subit de la part de son ambiance. En outre, PEEK s'imagine que chacune des valeurs dont l'une quelconque de ces variables est susceptible offre une certaine probabilité; de cette façon PEEK se croit autorisé à conclure que la mortalité humaine supporte fort bien l'application de la loi des grands nombres.

Sans nous demander si les suppositions de PEEK permettent une

---

[1]) C. L. Landré: *Keine Antikritik sondern Erläuterung*. Oesterreichische Versicherungs-Zeitung, Jahrg. XXV (15 Oct. 1898).

[2]) J. H. Peek: *Toepassing der Waarschijnlijkheids-Rekening op Levensverzekering en Sterfte-Statistiek*. Dissertation (Culenborg, 1898).

analyse intégrale du problème de la mortalité, nous tenons d'autre part à faire remarquer que le travail de PEEK n'offre guère les liens logiques dont un exposé scientifique doit témoigner; selon nous, cet auteur s'est borné à traduire en langage mathématique une conviction acquise par voie empirique; l'échec que cette tentative de traduction a décidément éprouvé ne saurait nous surprendre, car, comme nous le ferons voir dans le troisième chapitre, c'est tomber dans l'absurde que de vouloir motiver directement la légitimité d'assimiler les fréquences statistiques à des probabilités mathématiques. Nous croyons que PEEK lui-même s'est rendu compte de l'infécondité des essais à priori. En tout cas, c'est de la méthode indirecte qu'il se sert dans une publication ultérieure [1]). Cette *méthode consiste à rechercher dans quelle mesure les résultats* découlant des formules du calcul des probabilités se supportent avec les valeurs obtenues par combinaison des données empiriques. PEEK a analysé une table de la population néerlandaise en faisant usage de la théorie de la dispersion établie par LEXIS; les coefficients de divergence calculés par PEEK diffèrent peu de l'unité et de là cette conclusion: les conditions exigées par le calcul des probabilités sont remplies dans la statistique de la mortalité. Quant aux réserves mathématiques, PEEK déclare que celles-ci n'acquièrent une certaine signification qu'à partir du moment où elles sont rapprochées de la théorie du risque mathématique, puisque la supposition d'un grand groupe d'individus de même âge, et assurés d'une manière identique, ne se rencontre jamais dans la pratique.

Parmi les auteurs se contentant d'un accord assez grossier de la théorie avec la pratique, il convient de ranger aussi BLASCHKE [2]). Sans doute, cet auteur ne se dissimulait point que la mortalité humaine, parce que variant de façon quasi permanente dans une direction déterminée, ne laisse aucune place au calcul de chances numériques. Néanmoins il juge que „die Fragen über die Möglichkeit und Nützlichkeit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wenigstens für das Gebiet der Lebensversicherung, bejaht

---

[1]) Du même: *Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung.* Zeitschrift für Versicherungs-Recht und -Wissenschaft, V Band (1899), p. 169—197.

[2]) E. Blaschke: *Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen.* Statistische Monatschrift. Neue Folge, Jahrg. V (1900), p. 619—641.

werden müssten, falls für die Sterbenswahrscheinlichkeiten die Grundbedingungen der mathematischen Wahrscheinlichkeiten in brauchbarer Näherung zutreffen sollten" [1]).

Par suite d'influences sélectives de toutes sortes, le matériel fourni par les institutions d'assurances est plus homogène que celui emprunté à la statistique de la population; c'est à cause de cela que les recherches de BLASCHKE portent sur les documents offerts par les Compagnies d'assurances, dont plusieurs avaient déjà coutume de combiner leurs propres résultats avec ceux obtenus par leurs concurrents. Satisfait de ce qu'il avait tiré des données mises à sa disposition, BLASCHKE déclara qu'il est permis d'appliquer les théorèmes du calcul des probabilités à l'assurance sur la vie; du moins en général, car, dans chaque cas particulier, il reste nécessaire d'analyser scrupuleusement les chances qui se présentent. C'est BLASCHKE qui le premier ait eu l'idée de développer, à côté de celle qui prend son point de départ dans un groupe d'individus assurés, une seconde théorie, dans laquelle les capitaux assurés figurent comme fondement. S'il faut en croire BLASCHKE, l'on se trouverait ainsi à même, non seulement de régler judicieusement la réassurance, mais encore de poser, sur une base solide, la question du fonds nécessaire pour couvrir la réserve de risque.

Les idées émises par GOLDSCHMIDT [2]) ne diffèrent guère de celles développées par WAGNER; lui aussi, il estime devoir bannir le calcul des probabilités du domaine des assurances. Son argumentation s'appuie principalement sur la remarque que les conditions stipulées par le théorème de BERNOULLI, en particulier celle relative à l'égale vraisemblance des cas, ne se rencontrent pas dans la statistique de la mortalité; du moins il est de toute impossibilité de classer les cas suivant un tel critérium. Pour lui, toute tentative de fonder un problème d'assurance sur le calcul des probabilités revient à revêtir l'arbitraire d'un manteau mathématique. Il ne contestait point que l'idée de caractériser les événements naturels par des nombres conçus comme des chances se présente d'elle même; dans une foule de cas, dont les assurances sur la vie offrent des exemples frappants,

---

[1]) L.c. p. 620.

[2]) L. Goldschmidt: *Wahrscheinlichkeit und Versicherung.* Bulletin du comité permanent des Congrès Internationaux d'Actuaires. No. 1 (15 Mars 1897).

les phénomènes observés s'accordent d'une manière très satisfaisante avec ce qu'on attendait, et ceci produit alors l'impression d'un point de départ bien choisi. Mais GOLDSCHMIDT a soutenu expressément que, dans une tentative de justifier une méthode déterminée, il importe de ne faire venir l'appréciation du résultat que vers la fin.

Bien que formulée moins catégoriquement, la pensée de BERTRAND [1]) chemine dans la même direction; lui aussi, il prend soin de mettre ses lecteurs en garde contre l'idée erronée que la statistique de la mortalité cadre bien avec le schéma de BERNOULLI. Après avoir fait remarquer que la différence entre la mortalité observée et la mortalité supposée constitue pour les Compagnies un facteur des plus importants, il continue ainsi: ,,L'appréciation réduite à ces termes vagues n'est pas contestable; mais il n'est pas permis de la réduire en formule en assimilant les écarts à ceux que peuvent produire des tirages au sort dans une urne de composition fixe".

Nous devons à BOHLMANN un écrit exposant de façon systématique une théorie des mathématiques des assurances basée sur le calcul des probabilités [2]). Cette théorie mérite, par suite de sa forme logique, l'appellation d'oeuvre fondamentale. BOHLMANN pose quelques postulats et bâtit sur ceux-ci un certain nombre de théorèmes; de l'édifice ainsi obtenu il fait la clef de voûte de sa théorie.

Nous aurons encore l'occasion de contrôler les principes qui ont guidé BOHLMANN. Pour le moment, il nous suffit de signaler qu'il a défini les probabilités de vie et de décès suivant le procédé général qui partage les cas possibles en cas favorables et cas défavorables, et conséquemment, la valeur actuelle d'une somme assurée comme le produit de sa valeur probable par le facteur d'escompte approprié. Voici ce qui surprend dans son étude, pourtant si développée: aucune mention n'est faite de l'influence qu'une théorie mathématique des assurances sur la vie puisse subir d'une interprétation qui prend les

---

[1]) J. Bertrand: *Calcul des Probabilités.* Deuxième édition (Paris, 1907). Art. 235.

[2]) G. Bohlmann: *Lebensversicherungs-mathematik.* Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (Leipzig, 1900). Erster Band, zweiter Teil; art. D 4 b.

fréquences rencontrées dans l'étude de la mortalité comme des probabilités statistiques.

On conçoit que BOHLMANN n'a pas manqué de se poser la question de savoir dans quelle mesure ses postulats trouvent affirmation dans la pratique des choses; sa réponse renvoie simplement et purement aux recherches effectuées par PEEK et ses adeptes, qui, comme nous l'avons déjà relevé, ont trouvé une dispersion à peu près normale pour quelques séries statistiques concernant la mortalité. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner qu'au début de l'étude qu'il a consacré à la théorie du risque, BOHLMANN s'exprime en ces termes: „Die Erfahrung lehrt, dass unter den normalen Verhältnissen der Lebensversicherung die beobachteten Sterblichkeitsschwankungen in ausreichender Annäherung mit denjenigen übereinstimmen, die nach unseren Axiome zu erwarten sind, dass sie also in der That vom Mathematiker als „zufällige" Schwankungen bezeichnet werden dürfen" [1]).

C'est BROGGI qui a donné des développements à l'étude de BOHLMANN, de même qu'il en a approfondi les détails. Il a poussé jusqu'à ses dernières limites l'identification de l'assurance sur la vie et d'un jeu de hasard mathématiquement défini [2]).

CZUBER encore, penche au point de vue dogmatique. Ceci ressort déjà du fait qu'il a donné à la théorie de l'assurance sur la vie une place dans son ouvrage magistral sur le calcul des probabilités [3]). Toutefois, ce serait une erreur de croire qu'il ait jugé les phénomènes de la statistique, en toute généralité, compatibles avec les caractères propres au schéma des urnes.

N'empêche que CZUBER ait pris comme point de départ la supposition qui accepte les fréquences comme des évaluations empiriques de probabilités constantes, éventuellement de certaines combinaisons de semblables probabilités; mais il a pris toutefois soin de souligner que les fréquences observées motivent la prévision, alors

---

1) L.c. p. 903.

2) H. Broggi: *Versicherungsmathematik.* Deutsche Ausgabe (Leipzig und Berlin, 1911).

3) E. Czuber: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.* Unveränderter Nachdruck der dritten Auflage (Leipzig und Berlin, 1928).

seulement qu'un examen préalable ait fait apparaître leur conformité aux probabilités à priori.

En ce qui concerne une théorie des assurances sur la vie basée sur les éléments du calcul des probabilités, CZUBER a fait remarquer qu'une stabilité relative de la mortalité s'impose comme une chose de première nécessité; or, en fait une telle condition n'est réalisée qu'approximativement et il faut se garder d'attacher trop d'importance à des calculs effectués en vue d'une période de longue durée.

CZUBER exige aussi que les assurés peuvent être assimilés au matériel choisi pour construire la table de mortalité employée. Encore une condition mal remplie. En effet, le temps fait varier les conditions de l'existence et la manière dont s'opère la sélection. Les fluctuations dans la mortalité ne sont donc pas exclusivement de caractère fortuit; des influences offrant un caractère évolutif exercent un poids notable.

Remarquons finalement que CZUBER a envisagé également, en s'inspirant des idées que nous venons de reproduire, la signification que la théorie du risque présente pour la pratique [1]). Il se montre fort sceptique vis-à-vis de cette théorie. A son avis, les Compagnies n'éprouveront jamais le besoin de calculer effectivement les risques moyens de leurs opérations. L'utilité de la théorie du risque ne dépasse point le double but suivant: d'une part, elle peut servir à contrôler le fonds de réserve de risque, fixé au début, forcément, à l'aveuglette; d'autre part, elle peut contribuer à une analyse approfondie de la situation que la Compagnie présente à un moment donné.

En résumé, si CZUBER a établi la théorie de l'assurance sur la vie, au moyen du calcul des probabilités, il n'a pourtant pas hésité à avouer ouvertement que pareille manière de faire prête le flanc à bien des objections. Dualisme étrange, rencontré souvent dans la littérature actuarielle.

La littérature, que nous venons d'esquisser dans ses traits essentiels, trouve, à quelques exceptions près, son origine dans les pays de langue allemande; jusqu'à 1920, il fut à peu près impossible de citer relativement au sujet qui nous occupe, des publications écrites dans une autre langue que l'allemand. Ce phénomène doit s'expliquer, ce nous semble, du fait que le problème en question, si facile à mettre

---

[1]) L.c. II Band, p. 410—412.

en contact avec la philosophie, ne peut manquer d'intéresser l'esprit allemand, toujours enclin à la réflexion philosophique. Or, chose digne d'attention: ces derniers temps, ce même problème ne cesse de préoccuper les auteurs scandinaves. Contrairement à ce que nous avons vu pour les écrits allemands, orientés surtout vers la scrutation des principes, les auteurs des pays scandinaves envisagent plutôt le côté utilitaire du problème.

Le premier essai dans cette voie s'est manifesté dans l'attaque, très vive, dont la loi suédoise sur l'industrie des assurances (1903) a été l'objet de la part de NORDENMARK. Le législateur, dit-il, doit s'abstenir de toute contrainte mettant en jeu une matière encore sujette à controverse. NORDENMARK avait en vue la prescription légale qui exige des Compagnies la création d'un fonds de réserve jusqu'à concurrence d'un certain pourcentage fixe du montant auquel le calcul évalue le risque mathématique.

Les considérations que CRAMÉR a consacrées aux bases mathématiques de l'assurance témoignent d'une conception claire et d'un savoir profond [1]. Dans l'état de choses actuel, il ne se croit pas fondé à refuser au calcul des probabilités tout empiétement sur le terrain des assurances, mais il trouve que la manière dont on applique cette discipline fait preuve, aussi en ce qui concerne la statistique en général, d'une confiance vraiment exagérée.

Les considérations d'ordre critique rencontrées dans la littérature scandinave y sont surtout envisagées dans leur répercussion sur les problèmes suggérés par la pratique des affaires. LUNDBERG, par exemple, s'éleva contre une trop grande estime du principe qu'on appelle communément le principe d'équité [2]; il craint de ce principe une classification trop différenciée lorsqu'on l'applique aux risques tarés. Il expliquait, non sans raison, qu'une telle méthode donne lieu à une foule d'objections, notamment à celle-ci: elle est beaucoup trop radicale. Le principe d'équité ne doit être pris en considération que fort exceptionnellement.

---

[1]) H. Cramér: *Matematik och försäkring.* Nordisk försäkringstidskrift; årg. 4, No. 2 (1924).

Du même: *Försäkringsmatematik och försäkringsmatematiker.* Nordisk försäkringstidskrift; årg. 6, No. 4 (1926).

[2]) F. Lundberg: *Forsäkringstekniska spörsmål i modern svensk livförsäkring.* Nordisk försäkringstidskrift; årg. 5, No. 1 (1925).

Une polémique, mettant aux prises ENGLUND et CRAMÉR, a mis à l'ordre des problèmes d'une autre sorte[1]. Le premier juge la recherche d'une grande précision théorique impropre, comme étant contraire au but poursuivi par les fondateurs d'une Compagnie privée, et ainsi il s'oppose à ce que le principe d'équité intervienne dans le calcul des primes. Il le rejette également dans le cas où il s'agit de répartir une partie des bénéfices aux assurés. Quant au calcul des probabilités, cet auteur lui refuse péremptoirement le droit de pénétrer dans le domaine de l'assurance; c'est la théorie des chances qui nous a fourni une terminologie encombrée d'expressions vicieuses: „réserve individuelle", „prime exacte" et quantité d'autres.

CRAMÉR est loin de partager un point de vue aussi radical. Il concède sans réserve que les symboles relatifs aux chances peuvent facilement conduire à des conceptions erronées de la signification essentielle des problèmes actuariels. Il faut donc avoir l'esprit critique pour bien se servir de ces symboles; mais ceci ne condamne pas cependant l'emploi du calcul des probabilités. Ce dernier surgit toujours dans la théorie élémentaire des mathématiques des assurances, du moins pour ceux qui regardent les choses un peu de près. CRAMÉR est donc d'avis qu'il est impossible de débarrasser la théorie, même la plus élémentaire, du calcul des probabilités.

Le Finlandais NEVANLINNA mérite sans contredit le qualificatif de révolutionnaire. Selon cet auteur, philosopher dans le domaine des assurances sur un soit disant principe d'équité ne sert à rien; le seul principe qui offre un contenu concret, c'est celui de l'efficacité pratique et commerciale; il faut se garder de le compromettre par des considérations d'ordre théorique. Pas de calculs par trop minutieux ou visant l'estimation d'une réserve individuelle; pas de participation aux bénéfices basée sur une analyse détaillée des sources de profit! L'expérience et les exigences posées par la technique commerciale, voilà les seuls principes qui doivent nous guider dans le développement de l'industrie des assurances! Comme

---

[1]) K. Englund: *Kritiska betraktelser över aktuarievetenskapen.* Nordisk försäkringstidskrift: årg. 11, No. 1 (1931).

H. Cramér: *Till frågan om aktuarievetenskapens grunder. Ett diskussionsinlägg.* Nordisk försäkringstidskrift; årg. 11, No. 2 (1931).

Ces deux articles ont été publiés également, mais sous forme succincte et en anglais, dans le Skandinavisk Aktuarietidskrift; årg. XIV, Häft 3 (1931).

dans n'importe quelle autre entreprise, il faut dans une Compagnie d'assurance s'efforcer d'obtenir la plus grande simplicité et pareil but ne peut se réaliser qu'en mettant à profit, autant que faire se peut, l'idée de groupe [1]).

Il est certain que notre historique fait surgir quantité de questions qui rendent des explications désirables. Au centre figure le problème de savoir dans quelle mesure une méthode mathématique, exacte dans toute la force du terme et basée sur la théorie des probabilités, se laisse motiver dans le domaine des assurances; le point de vue rigoureusement dogmatique de PEEK, et les idées d'ENGLUND et de NEVANLINNA, constituent les extrêmes dans la série des opinions émises à propos de la question: Est-il possible de cultiver la science actuarielle sans faire intervenir le calcul des probabilités? Afin de trouver une voie dans ce labyrinthe, il faut d'abord examiner quelles sont les conditions que l'application du concept de probabilité réclame en général; cela fait, il faut rechercher si les éléments des mathématiques des assurances réalisent en effet ces conditions.

---

[1]) F. Nevanlinna: *Über die Prinzipien der Gewinnverteilung*. Comptes Rendus du neuvième Congrès international d'actuaires (Uppsala, 1930). Tome I, Rapport A, p. 106—117. Voir également son rapport d'ensemble sur cette question *Das Problem der Gewinnverteilung*. Tome IV, Procès-Verbaux, p. 109—116.

CHAPITRE III.

La notion de probabilité.

Comme nous l'avons fait remarquer déjà, dans l'introduction, le chapitre présent a pour but de mettre en relief que la notion de probabilité offre les caractères des abstractions mathématiques. Il n'est certes pas inutile d'envisager cette question, alors même quand on pense que ceux qui cultivent le calcul des probabilités considèrent ce dernier comme une discipline mathématique. En effet, il est difficile de nier que parmi les nombreuses interprétations dont la notion de probabilité est susceptible, certaines marquent celle-ci d'un cachet en quelque sorte métaphysique. En raison du fait qu'ainsi l'on s'est exagéré sa portée, plutôt modeste, nous croyons utile d'essayer de préciser la vraie signification de la notion de probabilité et de délimiter ensuite le domaine de son application.

Il est curieux de constater que la littérature a souvent signalé la différence essentielle qui séparerait le calcul des probabilités des autres théories mathématiques. Cette différence résiderait en ce que les mathématiques aspirent, non sans fondement, à obtenir des solutions rigoureuses; tandis que le calcul des probabilités doit nécessairement se contenter de résultats plus modestes [1]). Afin d'expliquer une telle manière de voir, l'on fait valoir que l'objet du calcul des probabilités est constitué par les événements fortuits, ou

---

[1]) Dans son ouvrage *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre* (Leipzig und Berlin, 1906), H. Bruns a donné une interprétation typique de cette conception. Après avoir fait remarquer que le calcul des probabilités part, comme tant d'autres théories, d'abstractions, il poursuit ainsi (page 6): „Daneben ist nun aber noch eine ausgeprägte Verschiedenheit vorhanden. Während nämlich überall sonst die Entwicklung einer Theorie darauf ausgeht, uns eine Einsicht in noch unerkannte Zusammenhänge zu verschaffen, so beginnt man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung damit, gewisse unerkannte, aber sicher vorhandene Beziehungen einfach als nicht vorhanden zu setzen. Dieser Umstand verleiht offenbar der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine ganz bestimmte Sonderstellung gegenüber allen übrigen Teilen der angewandten Mathematik".

en d'autres termes, par des événements où la relation de cause à effet se dérobe, en raison de son extrême complexité, à toute tentative d'analyse.

Sans doute, nous n'entendons point contester que les applications du calcul des probabilités concernent des événements fortuits. Ce que nous voulons soutenir, c'est la possibilité de définir et d'analyser le concept de probabilité, donc le point de départ du calcul des probabilités, par la voie exacte des mathématiques pures. S'il en est réellement ainsi, la différence qui séparerait le calcul des probabilités des autres théories mathématiques disparaît.

Imaginons un ensemble fini V, composé de M éléments équivalents entre eux et dont m offrent une certaine propriété A. Nous pouvons sans inconvénient laisser de côté la question de savoir si l'introduction de cette propriété, accordée seulement à un certain nombre des éléments de l'ensemble, puisse s'accorder avec l'équivalence que nous avons stipulée.

Nous écrivons:

$$P(A) = V(M, m)$$

et nous appelons probabilité correspondant à la propriété A, la fraction:

$$p(A) = \frac{m}{M}$$

Supposons maintenant que m éléments de V possèdent la propriété A, tandis que n autres éléments offrent la propriété B. Dans ce cas, nous aurons:

$$P(A \text{ ou } B) = V(M, m+n)$$

ou en écriture symbolique:

$$P(A+B) = V(M, m+n)$$

d'où il suit:

$$p(A+B) = p(A) + p(B)$$

c'est à dire le théorème des probabilités totales.

Imaginons maintenant deux ensembles finis V_1 et V_2. Nous ne stipulons pas que les M_1 éléments de V_1 soient équivalents aux M_2

éléments de V_2. Si m_1 éléments de V_1 possèdent la propriété A_1 et m_2 éléments de V_2 la propriété A_2, nous pouvons penser un ensemble V dont les éléments se représentent par les couples que l'on peut former en associant à chaque élément de V_1 successivement tous les éléments de V_2. En écriture symbolique, nous aurons:

$$P(A_1 \,.\, A_2) = V(M_1 \,.\, M_2, m_1 \,.\, m_2)$$

de quoi il résulte:

$$p(A_1 \,.\, A_2) = \frac{m_1 m_2}{M_1 M_2} = p(A_1) \,.\, p(A_2)$$

c'est à dire le théorème des probabilités composées.

Les autres théorèmes du calcul des probabilités peuvent s'établir en procédant de même. Nous ne croyons pas devoir insister, car, ce qui précède prouve déjà suffisamment que la notion de probabilité se prête à être traitée suivant une méthode rigoureusement mathématique et à l'abri de toute pétition de principe. Ceci ne veut pas dire que notre façon de développer le concept de probabilité élimine, comme par enchantement, toutes les difficultés; ce que nous espérons avoir atteint, c'est la transposition du centre de gravité des difficultés sur le domaine des applications. Nous nous proposons de revenir en détail sur ce point, mais nous tenons à souligner dès à présent que notre manière de présenter les choses offre l'avantage appréciable d'une théorie des probabilités qui s'appuie, comme d'autres théories mathématiques, sur une base purement analytique [1]).

Figurons-nous un corps parfaitement homogène et répondant rigoureusement à la définition donnée en géométrie du cube; nous nous trouvons ainsi en présence d'un ensemble V dont les six éléments — les faces du cube — sont équivalents entre eux. Si nous

[1]) La plupart des théoriciens affirment que la définition classique n'est pas mathématique parce qu'elle doit faire dans chaque application la convention de l'égale vraisemblance des différents cas. Citons sous ce rapport H. Poincaré qui s'exprime dans son *Calcul des probabilités* (Paris, 1912; deuxième édition) ainsi (page 28): „Une définition mathématique n'est pas possible; nous devrons, dans chaque application, faire des conventions, dire que nous considérons tel et tel cas comme également probables". L'introduction de conventions est du reste inévitable, même dans le cas d'une définition mathématique; autrement, une théorie ne serait jamais susceptible d'applications.

attribuons à l'une des faces le chiffre 3, la probabilité qui correspond à cette même face s'exprime d'après ce qui précède par la fraction $^1/_6$.

On s'exprime habituellement en disant que la fraction $^1/_6$ indique la probabilité d'amener le chiffre 3. Or une telle interprétation ne cadre pas avec nos considérations et conséquemment nous la rejetons. Nos prémisses n'ont rien à faire avec l'idée d'un événement soumis au hasard, et, à plus forte raison, n'ont aucun rapport avec celle d'un résultat à attendre. En vertu de considérations déterminées concernant la forme géométrique et l'état physique du cube, nous étions à même de définir un ensemble à éléments équivalents, et nous avons associé à l'une des faces du cube le nombre $^1/_6$ comme résultat d'une opération consistant dans un classement suivi de l'établissement d'une correspondance, opération dans l'espèce d'une simplicité extrême. Nous devons nous contenter des deux principes d'équivalence et de correspondance. Nous faisons remarquer expressément que nous nous refusons absolument à voir dans une fraction marquée du vocable „fraction de probabilité", ou d'un autre analogue, l'expression numérique d'une supputation se rapportant à la réalisation future d'un événement incertain.

Il importe de souligner cette restriction. En effet, nombreux sont ceux qui s'occupent du calcul des probabilités sans disposer de l'esprit de discernement que l'étude de cette discipline réclame. Il existe un mot que nous avons laissé jusqu'à présent intentionnellement en dehors de nos considérations, savoir celui de chance. Nous voyons dans ce mot, né longtemps avant l'époque où écrivait LAPLACE, le terme ayant servi pendant des siècles et servant toujours à traduire les opinions, fortement subjectives et plutôt intuitives que raisonnées, que l'on se fait dans la vie courante quant à la réalisation des événements jugés aléatoires. Comme il arrive souvent en pareil cas, ici encore, le mot du langage de tous les jours a passé dans la terminologie des savants et a contribué à induire des esprits, par ailleurs des plus réfléchis, inconsciemment en erreur. C'est ainsi que nous croyons devoir expliquer le fait que la plupart des traités contiennent des énoncés de ce genre: en jetant un seul dé, l'on peut parier 1 contre 5 d'amener 6; dans 4 coups avec un seul dé, l'on peut s'attendre à amener 6, mais dans 24 coups avec deux dés, l'on ne doit pas s'attendre à obtenir sonnez comme résultat, et caetera. A condition de ne pas perdre de vue la signification objective de la notion de probabilité mathématique, semblable manière de s'exprimer peut s'admettre. Mais cette notion reçoit une interprétation contraire à son caractère mathématique dès qu'on fait naître l'impression — et c'est ce que la définition classique, qui pose l'équivalence des différents cas comme demeurant immuable pendant toute la durée de l'expérimentation, fait certainement — qu'une chance représente l'expression numérique d'une conjecture de ce qui va se produire [1]).

Le calcul des probabilités doit fournir en premier lieu une analyse, simplement et purement descriptive, des ensembles finis à éléments équivalents dont une partie offre une propriété déterminée; on peut dire encore qu'il caractérise, moyennant des nombres fractionnaires, des événements considérés comme „aléatoires". Cette discipline n'est en aucune façon une science mystérieuse nous permettant de dévoiler le sens caché d'un hasard plein d'énigmes. C'est faire preuve d'ignorer la vraie signification des nombres appelés probabilités numériques que de s'exprimer ainsi: „je viens d'amener avec une pièce de monnaie dix fois de suite face; voilà ce qui me confond et je voudrais bien qu'on m'explique comment ce résultat se laisse accorder avec les règles du calcul des probabilités".

Il ne faut pas conclure des considérations données jusqu'à présent que le mathématicien-probabilogue ferait bien de se détacher complètement de la question de savoir dans quelle mesure l'accord existe entre la réalité concrète et les fondements posés par sa théorie. Bien au contraire, après avoir échafaudé sa théorie en partant d'une définition purement mathématique de la notion de probabilité, il ne saurait se dérober à la tâche qui consiste à confronter les résultats théoriques avec les faits.

---

[1]) Dans sa thèse du doctorat: *Over kans en kansrekening. Beschouwingen en critiek* (Emmerik, 1921), P. Talma souligne, lui aussi, la différence qui existe, relativement à l'idée de probabilité, entre la notion intuitive et le concept mathématique, indiqués chez lui par les termes de „vraisemblance" et de „chance" respectivement. Nous ne le suivrons pas dans cette terminologie, car le langage courant persistera sans doute dans l'emploi simultané de ces deux termes.

Remarquons en passant que la définition développée par Talma s'inspire du point de vue de von Kries, qui part de la notion de *Spielraum* (domaine de variation) pour définir la probabilité. Voir son ouvrage précité *Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Nous n'insistons pas sur cette manière de concevoir les choses, car nous avons la conviction qu'elle ne pare pas aux inconvénients de la définition classique.

Or, la manière dont nous avons envisagé la notion de probabilité exige que pareille confrontation s'entoure de réflexions scrupuleuses. Soit un ensemble réel qui réalise à un haut degré notre supposition quant à l'équivalence des éléments entre eux. Cette équivalence presque parfaite se maintiendra-t-elle lorsque nous soumettons notre ensemble à une expérience? Dans le cas d'une réponse négative, le mathématicien-probabilogue sera obligé de déclarer une théorie telle que la nôtre inapplicable au problème de la pratique.

Effectuons donc une expérience avec un dé exécuté de main de maître, s'approchant par conséquent de fort près de notre dé idéal de toute à l'heure. Il est évident que pendant toute la durée de l'expérience le dé portera avec lui ses qualités intrinsèques, notamment celle de l'équivalence presque parfaite de ses six faces. L'expérience finie, le dé, de nouveau en repos sur la table, montrera nécessairement une face déterminée. Mais pourquoi cette face sera-t-elle par exemple celle qui porte le chiffre 3 et non l'un des cinq autres? A cause de l'équivalence presque parfaite de ses faces entre elles, l'influence exercée par le dé même doit être qualifiée de minime en comparaison de celle subie de la part de facteurs extérieurs beaucoup plus intenses. Citons sous ce rapport: la position occupée par le dé au moment de quitter la main; l'impulsion reçue à ce moment-là; les courants d'air; l'état plus ou moins lisse de la table. Sans doute, l'action due à ces facteurs se soustrait à toute analyse tant soit peu précise; mais la véritable question se trouve ailleurs. Ce qui est essentiel dans l'explication du résultat, c'est de ne pas fermer les yeux sur l'influence prépondérante de ces multiples facteurs et de reconnaître que leur action ne s'exerce point de manière équivalente sur chacune des six faces. S'il est vrai que l'expérience n'altère pas l'équivalence caractérisant la nature du dé, il est également vrai qu'elle superpose à cette équivalence une non équivalence très accentuée. Ceci revient à répondre par la négative à la question posée dans l'alinéa précédent et par suite à déclarer la théorie non applicable. Ce que nous venons de dire à propos d'un coup de dé se laisse répéter, mutatis mutandis, par rapport à d'autres expériences, par exemple au cas où il s'agit de tirer une boule d'une urne contenant des boules identiques à la couleur près. Le fait que j'ignore la disposition des boules ne permet pas de les considérer comme équivalents vis-à-vis des facteurs qui décideront de mon choix.

Nous voyons donc que les événements fortuits du genre de ceux que le calcul des probabilités a envisagés dès sa naissance s'exécutent avec une matière qui supporte, au moment où l'expérience va commencer, fort bien l'assimilation à un ensemble dont les éléments sont équivalents entre eux. Mais pendant l'expérience, des facteurs dépendant des circonstances extérieures travaillent à éclipser cette équivalence, et, tout compte fait, il est inadmissible de soutenir que l'expérience se rapporte à un ensemble à éléments équivalents. Nous sommes donc arrivés à déclarer légitime la conclusion: Le calcul des probabilités est sans aucune utilité lorsqu'il s'agit d'expliquer des résultats obtenus au moyen d'un petit nombre d'expériences.

Il y a lieu de se réjouir de la conclusion à laquelle nous sommes parvenus. En effet, nous avons fait remarquer qu'une probabilité mathématique ne nous renseigne pas sur le résultat à attendre d'un événement fortuit isolé. D'autre part, nos dernières considérations montrent qu'une seule expérience ne réalise point les conditions posées par la théorie; si bien que de ce chef aussi, il faut rejeter toute idée qui attribue aux chances un caractère prophétique quand les expériences sont en nombre très limité.

D'après tout ce qui précède nous nous croyons autorisés à affirmer catégoriquement que la déduction de nombres de probabilité n'est autre chose qu'une occupation de valeur purement théorique et de portée pratique absolument nulle. Cela étant, il y a certainement lieu de parler d'une différence notable entre le calcul des probabilités et d'autres théories mathématiques. En général, nous saluons dans une théorie un auxiliaire propre à rendre notre interprétation de la réalité physique plus claire et plus étendue, alors même que l'on cherche l'explication d'un phénomène peu fréquent. Or, c'est précisément la théorie des probabilités qui fait ici exception. Toutes les tentatives en vue de l'appliquer sont vouées à l'insuccès. On ferait bien de reconnaître franchement notre impuissance à cet égard et de rompre par suite avec l'illusion qui voit dans le calcul des probabilités quelque instrument magique capable de nous dévoiler d'avance les caprices du hasard.

En conséquence de ce que nous venons d'exposer, nous n'éprouvons pas le besoin de prendre parti dans le combat qui divise, en ce qui concerne la notion de chance, les objectivistes et les subjectivistes.

Ce combat est dû principalement à la question qui demande dans quelle mesure l'idée d'un résultat à attendre se laisse rattacher à la notion de chance. Question peut-être fort intéressante en elle-même, mais sans lien avec le calcul des probabilités. La définition que nous avons développée, moyennant des ensembles finis, du concept de probabilité, permet d'attribuer la valeur $\frac{1}{2}$ à la probabilité de tirer une boule blanche d'une urne de composition inconnue. Rien n'empêche les subjectivistes de substituer à l'urne un ensemble composé de deux éléments parfaitement équivalents. Mais selon nous, il convient de le répéter, ce nombre doit être considéré comme une abstraction. Remarquons encore que notre exemple de l'urne de composition inconnue concrétise l'idée des subjectivistes qui croient, dans les cas d'ignorance complète, toute contradiction levée dès qu'on pose la probabilité égale $\frac{1}{2}$[1]).

Il importe de signaler que les problèmes réalisant les conditions exigées par le théorème de BERNOULLI offrent une signification tout à fait unique. Nous aurons soin de nous y arrêter avec tous les détails nécessaires. La catégorie des problèmes en question comprend seulement des événements tels que l'équivalence des éléments composants se laisse déduire de données objectives.

Nous avons beaucoup insisté sur la distinction qui sépare la notion de probabilité de celle de prédiction, et nous craignons que notre digression n'ait mis la patience de plus d'un lecteur à une rude épreuve. S'il en est ainsi, nous espérons que les quelques lignes qui vont suivre maintenant nous servirons d'excuses. Les traités signalent généralement de manière insuffisante le fait que les mathématiciens qui s'occupent du calcul des probabilités n'attachent aucune valeur à leur théorie lorsque le nombre des expériences est restreint. C'est par là que nous croyons devoir expliquer la confusion amenée par l'emploi de la notion de „valeur probable" et c'est ainsi que nous déclarons que le terrain du calcul des probabilités, parsemé de conceptions mystiques, demande un sarclage énergique.

Soit n événements $A_1, A_2 \ldots A_n$ qui s'excluent mutuellement et

---

[1]) La conception subjectiviste a trouvé surtout en K. Stumpf un défenseur fort habile. Voir sa publication *Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit.* Berichte der bayrischen Akademie (philos. Klasse), 1892; p. 37—120.

dont les probabilités se représentent par $p_1, p_2 \dots p_n$. Si l'on fait correspondre à ces événements respectivement les valeurs $a_1, a_2 \dots a_n$, l'expression:

$$P = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$$

s'appelle la valeur probable totale.

On a appliqué ce principe aux jeux de hasard. Voici le raisonnement habituel. Si un événement de probabilité p se produit, une personne recevra un montant a. Dans le cas contraire elle ne touchera rien. Le produit pa représente alors la valeur probable. S'il s'agit d'un jeu, l'on se sert généralement de l'expression: espérance mathématique.

La bien singulière combinaison d',,*espérance mathématique*'' fait déjà preuve d'une interprétation erronée de la notion abstraite de valeur probable, en ce sens, qu'on rapproche celle-ci de l'idée d'un pronostic sur un gain à obtenir. C'est surtout POISSON qui est allé très loin dans cette voie; il s'est exprimé ainsi: ,,si le gain espéré par une spéculation est 60.000 frs et que $1/3$ soit la probabilité de l'obtenir, la personne qui devra recevoir cette somme éventuellement pourra considérer le tiers de 60.000 frs comme un bien qu'elle possède et que l'on devrait comprendre dans l'inventaire de sa fortune''[1]. D'autres auteurs se sont montrés plus prudents dans leurs affirmations. C'est seulement dans un ouvrage de BOREL[2] que nous avons trouvé signalé expressément qu'on ne doit pas chercher à interpréter l'expression espérance mathématique d'après le sens usuel des deux termes ,,espérance'' et ,,mathématique''.

Une autre expression vicieuse est celle de jeu équitable. On entend par là un jeu qui offre à chacun des joueurs la même espérance mathématique. Il nous semble absurde d'introduire ici un adjectif qui évoque des considérations d'ordre moral. C'est aux joueurs de décider dans quelles conditions ils jugeront le jeu acceptable. Pour avoir assumé la tâche de construire une théorie des jeux de hasard, le mathématicien doit s'abstenir d'autre part de couvrir la pratique du jeu de son autorité.

---

1) S. D. Poisson: *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités* (Paris, 1837); p. 71.

2) E. Borel: *Eléments de la théorie des probabilités* (Paris, 1909); p. 12.

Sous ce rapport nous voulons dire un mot à propos de ce qu'on appelle le paradoxe de *Saint-Pétersbourg*. PAUL jette une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'il ait amené pile. S'il faut n coups pour y arriver, il reçoit de PIERRE 2^{n-1} francs. Un raisonnement fort simple fait voir que la mise de PAUL ne saurait avoir une valeur finie.

Ce résultat est qualifié de paradoxal, car, dit-on, il est clair que PIERRE se contentera d'une somme relativement petite. Et l'on conclue: contradiction entre les mathématiques et le sens commun, alors que LAPLACE a glorifié la théorie des probabilités comme l'expression même du sens commun! Afin de vaincre les difficultés, plusieurs solutions ont été présentées, et le fait que certains auteurs ont cédé au sens commun, nous semble témoigner d'un manque de respect à l'égard de l'analyse mathématique du problème de *Saint-Pétersbourg*. La théorie de l'espérance morale surtout a fait prime, à ce point même qu'on la rencontre toujours dans les traités, bien que les auteurs la jugent mieux placée dans la théorie des valeurs [1]).

Est-ce vraiment paradoxal de demander, dans le jeu de *Saint-Pétersbourg*, à PAUL une mise illimitée? Des considérations qui n'ont rien à faire avec le problème peuvent seulement conduire à une réponse affirmative. Si l'on tient à identifier les chances de PAUL et de PIERRE, il apparaît que ce but ne se laisse pas réaliser lorsqu'on limite la mise de PAUL. Voilà tout. A vrai dire, la solution mathématique ne dit rien quant à la façon dont il convient de pratiquer le jeu; si les joueurs tiennent à tenter leur veine au jeu, c'est à eux qu'il appartient de fixer conformément au ,,sens commun'' la mise de PAUL, mais ils doivent s'abstenir de chercher dans le calcul des probabilités une excuse à leur goût du jeu.

Dans le cas d'un nombre limité d'expériences, nous avons déclaré l'application de la notion de probabilité inadmissible, chaque fois que les éléments de l'ensemble à construire ne demeurent pas équivalents pendant toute la durée de l'expérimentation.

L'exemple d'un coup de dé nous a servi alors à montrer que l'équivalence en question ne résiste point aux diverses influences qui

[1]) Il est à remarquer qu'en général le sens commun n'accepte pas les valeurs que la théorie établit pour les probabilités. Si, par exemple, le paiement de 1000 francs a une probabilité de 0,001, peu de gens voudront verser une mise de 1 franc. Pareille attitude nous semble témoigner d'une saine logique.

s'exercent au cours d'une expérience. Plaçons-nous maintenant dans le cas d'une série de coups assez nombreux. Il va de soi que le raisonnement qui nous a conduit plus haut à nier l'équivalence, demeure entier pour chaque coup de la série. On peut se demander cependant quel sera l'aspect des choses quand on considère les différents coups dans leur ensemble. Voyons si dans ce cas les faits ne cadrent pas mieux avec les prémisses posées par nous. Il est évident que les différents facteurs dont l'action trouble l'équivalence des éléments n'agissent pas d'une manière toujours la même. Remarquons, par exemple, que l'orientation du dé par rapport à la table au moment de quitter la main, de même que l'impulsion reçue à ce moment là, varient d'un coup à l'autre. On sait d'ailleurs que l'usage d'un gobelet sert précisément à changer constamment cette orientation et cette impulsion, si bien que les facteurs perturbateurs se contrebalancent à peu près dans leurs effets ou, en d'autres termes, que l'action d'ensemble de ces facteurs est d'autant plus la même pour chacune des six faces à mesure que le nombre des coups augmente. Grâce à la compensation ainsi obtenue, les faits finissent par s'accorder de plus en plus avec nos prémisses.

Pareille explication offre cependant, nous l'avouons, une certaine difficulté. Affirmer que la multiplicité des coups établit l'équivalence des faces, n'est-ce pas rester à la superficie des choses? Comment motiver semblable affirmation? Des questions de cet ordre ne sont certes pas dénuées d'intérêt, mais du point de vue du mathématicien toute tentative de réponse nous semble ici vaine. Remarquons seulement que la nature nous offre fréquemment le spectacle de cas où la répétition d'un phénomène revient à une sorte d'égalisation et qu'en matière d'explication l'on se contente alors souvent d'un simple appel à l'intuition, la solution raisonnée étant jugée plutôt l'affaire des philosophes.

Ainsi donc, abandonnant tout essai d'explication, nous nous bornons à la simple déclaration que les faces se font valoir d'une manière équivalente dès que le nombre des coups est suffisamment grand. Il importe de ne pas oublier que nous n'envisageons pas chaque coup isolément. Il faut considérer la série dans sa totalité, non comme la succession d'un grand nombre de coups isolés, mais en quelque sorte comme une expérience élargie. C'est en envisageant la série de cette façon que nous parlons de l'équivalence des éléments et, pour faciliter les raisonnements, nous pouvons sans inconvénient déclarer que tout se passe comme si cette équivalence existe pendant toute la durée de l'expérimentation, donc aussi pendant chaque intervalle de temps nécessaire à faire un coup. Comme nous l'avons montré plus haut, l'équivalence fait défaut lorsqu'on considère l'un quelconque des coups isolément, donc indépendamment de la série dont il fait partie.

Il est évident que les considérations précédentes se laissent répéter, mutatis mutandis, par rapport à d'autres événements fortuits; citons le tirage de boules colorées d'une urne, les problèmes posés par les loteries, et caetera.

C'est le théorème de BERNOULLI qui s'occupe d'un ensemble très grand de coups. Il donne la probabilité mathématique pour que l'écart relatif par rapport au résultat le plus probable ne dépasse pas en valeur absolue une certaine quantité fixée d'avance, appelée écart *relatif absolu. Cette probabilité s'approche rapidement de l'unité et* cela d'autant plus que les épreuves deviennent plus nombreuses. En invoquant les renseignements fournis par l'expérience, on s'est cru fondé à assimiler une probabilité voisine de l'unité à la certitude. Si pareille assimilation est vraiment légitime, le théorème de BERNOULLI offrirait le moyen de satisfaire, dans une mesure presque parfaite, notre curiosité en ce qui concerne la réalisation d'événements fortuits.

Lorsqu'une épreuve peut amener différents résultats, on dit communément que ces résultats dépendent du hasard. Dans le cas d'un nombre très grand d'épreuves, l'expérience nous apprendrait que chacun des résultats possibles se manifeste avec une fréquence relative sensiblement égale à sa probabilité mathématique; et cela d'autant mieux que le nombre des épreuves est plus grand. La différence entre la fréquence relative et la probabilité diminuerait indéfinément à mesure que le nombre des épreuves augmente.

Ici se pose la question: l'expérience appuie-t-elle suffisamment une conclusion d'une si haute portée? Certes, elles ne manquent pas, les observations qui s'accordent d'une manière satisfaisante avec la loi que nous venons de formuler, connue sous le nom de loi des grands nombres; mais, à notre avis, le matériel dont on dispose n'est pas assez nombreux pour que l'existence d'une relation limite entre la fréquence relative et la probabilité se laisse motiver par un simple appel à l'expérience.

On a voulu voir dans la loi des grands nombres une conséquence du théorème de BERNOULLI. A tort cependant, car, ce théorème fournit en somme la valeur d'une probabilité mathématique et une probabilité a beau se rapprocher de l'unité, une probabilité reste une probabilité. Si probabilité est autre chose que certitude, abstraction mathématique autre chose que fait concret, le théorème de BERNOULLI ne saurait dominer le domaine des phénomènes naturels.

Il est facile de montrer que le théorème de BERNOULLI contredise même la loi des grands nombres, dès qu'on considère un événement de très grande probabilité comme devant se produire nécessairement. Soit p la probabilité d'un événement E, q celle de l'événement contraire. Si le nombre des épreuves est s et m/s la fréquence relative de l'événement,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

représente la probabilité pour que l'on ait:

$$p - \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}} < \frac{m}{s} < p + \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

Pour fixer les idées, nous supposons qu'un dé soit jeté 6000 fois. Il y a une probabilité 0,999 pour que la fréquence relative ε de l'apparition d'un chiffre déterminé satisfasse à l'inégalité:

$$\tfrac{1}{6} - 0{,}01583 < \varepsilon < \tfrac{1}{6} + 0{,}01583$$

Affirmer que la probabilité 0,999 vaut la certitude, revient à déclarer que dans une série de 6000 coups la fréquence relative d'un chiffre déterminé diffère au plus 0,01583 de $^1/_6$.

Considérons maintenant 100000 séries dont chacune se compose de 6000 coups. Pour chaque série, il y a une probabilité 0,001 pour que la fréquence relative d'un chiffre déterminé diffère au moins 0,01583 de $^1/_6$; la probabilité pour que σ, nombre de fois que cette „impossibilité" se présente, satisfasse à l'inégalité:

$$67 < \sigma < 133$$

s'écrit 0,999 et devrait conséquemment être assimilée, elle aussi, à la certitude.

Malgré l'impossibilité évidente de réaliser des séries comprenant un si grand nombre d'épreuves, il est permis d'y recourir en théorie. L'exemple donné plus haut, application directe du théorème de BERNOULLI, montre bien qu'il faut se garder de poser comme certaine la réalisation d'un événement dont la probabilité est voisine de l'unité.

Une chose intéressante est à constater ici. Les familiarisés du calcul des probabilités savent fort bien que, dans les séries d'épreuves très prolongées, le hasard peut se montrer fort capricieux; mais il semble difficile à plusieurs de s'imaginer qu'un nombre restreint d'épreuves peut également amener un résultat jugé à priori extrêmement rare. Le désir de faire concorder, en matière de probabilités, les constructions mentales avec les résultats de l'expérience a sans doute conduit à admettre, plus ou moins implicitement, l'apposition du sceau de l'impossibilité sur les événements de probabilité fort petite. Où s'arrêter dans cette voie? Le fait que cette question n'est pas susceptible d'une réponse objective est relativement de peu d'importance. On fera bien de ne pas entourer ce point de considérations subtiles; car il importe d'éviter tout ce qui pourrait faire naître l'idée que dans l'espèce le calcul des probabilités règne en maître souverain.

Nous sommes donc amenés à la conclusion que les applications du théorème de BERNOULLI reposent sur une convention et que ce théorème cadre mal, tout au moins quant à son côté pratique, avec le calcul des probabilités. Si nous avons souligné notre point de vue, nous n'entendons nullement rabaisser cette question des applications à tirer du théorème de BERNOULLI. Les matériaux fournis par l'expérience sont trop peu nombreux, nous le répétons, pour que nous soyons en droit de considérer comme certaine la réalisation d'événements de très grande probabilité. N'empêche que le hasard n'ait jamais démenti notre confiance et qu'ainsi la convention à laquelle nous venons de faire allusion ne présente qu'un danger minime. Il n'y a donc pas lieu de blâmer ceux qui ne s'inquiètent pas de considérer comme certains, les événements de probabilité très grande, comme impossibles, les événements de probabilité fort petite.

A présent que la signification du théorème de BERNOULLI nous est apparue sous son vrai jour, ce théorème pourra nous servir, et sans que nous ayons à craindre quelque malentendu, à mettre la notion de probabilité plus près de la réalité. Nous avons défini la probabilité d'un événement fortuit comme une grandeur mathématique ne permettant aucune prévision dans le cas d'un petit nombre d'épreuves. Mais si nous regardons un tel événement sous le jour du théorème de BERNOULLI, nous reconnaissons la possibilité de le réaliser plus ou moins; dans le cas d'une série composée d'un grand nombre d'épreuves, la fréquence relative offre même, conformément à notre attente, une tendance à s'approcher de la probabilité. Nous laisserons de côté la question de savoir si une affirmation de cette sorte s'appuie sur un motif logique[1]).

Le calcul d'une probabilité acquiert donc une signification plus que théorique lorsque l'événement envisagé répond aux conditions réclamées par le théorème de BERNOULLI. Toutefois, l'équivalence des éléments entre eux doit être à l'abri de tout doute. On pourra se contenter au besoin d'une équivalence ne se manifestant que dans une série d'épreuves fort prolongée. Mais l'expérimentateur qui opère avec une pièce de monnaie ordinaire doit cependant abandonner tout espoir d'obtenir des résultats s'accordant avec des calculs basés sur une probabilité égale à $1/2$. Les probabilités appelées — au sens net du terme — probabilités subjectives, offrent des attaches encore moins solides. Est-ce que nous faisons avancer la question en disant par exemple que la probabilité de tirer une boule blanche d'une urne de composition inconnue est égale à $1/2$? Nullement. Pareille affirmation revient simplement à mettre sur notre ignorance un écriteau portant un chiffre. Le théorème de BERNOULLI ne nous apporte ici pas la moindre explication et l'introduction de $1/2$ comme probabilité ne saurait dissiper les vapeurs qui rendent vaines nos tentatives d'établir une théorie convenable.

Le calcul des probabilités à postériori exige de l'esprit une tension forte et soutenue afin de rester fidèle aux règles de la logique. Le terrain en question offre des problèmes de nature à stimuler les

---

[1]) Voir L. Goldschmidt: *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik* (Hamburg und Leipzig, 1897); p. 174—191.

facultés de l'imagination plutôt que celles du raisonnement. Or, nombreux sont ceux qui prennent plaisir à donner libre carrière à leur imagination et c'est sans doute à cause de cela que quantité de traités foisonnent en problèmes plus ou moins plaisants, mais exposés avec un sérieux digne d'une question du tout premier plan.

Le calcul des probabilités à postériori vise à déduire du résultat d'un certain nombre d'épreuves, les probabilités pour les causes qui ont pu amener ce résultat; ensuite, il s'efforcera d'arriver à une probabilité pour l'événement même [1]). Ce qui rend la solution du problème difficile, c'est qu'en général rien n'est donné à priori relativement aux causes. Supposer alors les différentes causes également probables, c'est réduire la détermination de la probabilité de l'événement à ce que les auteurs de langue allemande appellent „eine mathematische Spielerei", à moins qu'un examen spécial n'aît fait connaître les probabilités à priori des différentes causes comme ne mettant que peu de poids dans la balance. Même en ce cas, la solution ne saurait donner satisfaction et la valeur qu'elle mérite se décide en somme par le goût personnel du chercheur.

Voici un problème dans lequel l'insuffisance des données est très visible: une urne contient c boules; on fait s tirages; si toutes les boules tirées sont blanches, on demande la probabilité pour que l'urne contienne a boules blanches [2]).

On éprouve de la peine à voir dans ce qui précède un véritable problème et le mathématicien aurait parfaitement raison de répliquer: à sotte question, point de réponse. Il est évident qu'une certaine supposition, quant à la composition de l'urne, est absolument inévitable. On pourrait faire correspondre une seule et même probabilité à n'importe quel nombre de boules blanches. Zéro par exemple? Certainement, car ce choix n'altère d'aucune façon le principe qui veut que les probabilités à priori soient déterminées indépendamment du résultat fourni par l'expérience.

---

[1]) Il est utile de se conformer à l'usage courant qui parle de probabilité à postériori pour caractériser les événements par rapport auxquels les données objectives nous font défaut. Les probabilités à postériori demandent néanmoins les mêmes réserves que celles que nous avons mises en relief quant aux probabilités à priori; il faut se garder d'y voir un guide capable de nous dévoiler l'avenir.

[2]) Voir Czuber: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, l.c. no. 120.

A l'aide d'une semblable hypothèse complémentaire, il est possible d'arriver à une solution, mais la question est dénuée de tout intérêt pratique. Le comble serait de transformer l'énoncé précédent en disant que l'urne contient tout au plus *c* boules [1]). Le penseur qui serait capable, aussi dans ce cas, de mettre à contribution le calcul des probabilités, ferait sans doute dans le monde des fervents du principe subjectif l'objet de l'admiration générale.

Les causes concrètes de l'événement observé nous échappent généralement et les différentes causes sont simplement considérées comme ayant chacune une seule et même probabilité, comprise entre 0 et 1. Assurément, il serait recommandable d'affecter chaque probabilité d'un poids convenable; mais l'absence de données rend, dans la majorité des cas, l'introduction de probabilités pondérées impossible.

On pourrait faire ici l'observation: dans l'ignorance rien ne sert de calculer. Or il n'est pas nécessaire d'en arriver à cette extrémité-là, c'est à dire à l'abandon complet du calcul des probabilités à postériori. En effet, l'étude a montré qu'il suffit de s'adresser aux longues séries d'observation; parce qu'alors, parmi l'infinité des valeurs qu'il est possible de faire figurer comme probabilités, ceux pouvant exercer une influence sur le résultat final occupent un domaine restreint. L'examen montre également le peu d'importance des probabilités pondérées dans le cas des séries très prolongées.

C'est sur ce que nous venons d'exposer que repose le théorème de BAYES et, avant d'appliquer celui-ci, il faut toujours se demander si le problème à résoudre offre bien les conditions exigées. BUFFON jeta 4040 fois une pièce de monnaie et obtena 2048 fois pile. Résultat raisonnable. Si l'on voulait cependant faire appel au théorème de BAYES afin d'affecter d'une probabilité l'imperfection de la pièce employée par BUFFON, ce serait faire fausse route. On aurait beau attribuer l'écart du résultat effectif par rapport au résultat le plus probable en partie aux imperfections de la pièce employée par BUFFON, la question de préciser le degré de défectuosité de la pièce n'en reste pas moins sans réponse. Mais alors il est inadmissible de supposer pour pile toutes les probabilités entre 0 et 1 à priori de même poids. Il est vrai qu'en raison du grand nombre des épreuves

---

[1]) Cf. N. Herz: *Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung* (Leipzig, 1900); p. 148—150.

les probabilités pouvant influencer directement le résultat constituent un domaine restreint par rapport à celui formé par la totalité des probabilités. L'objection que l'hypothèse introduite repose sur un raisonnement spéculatif demeure cependant, et empêche par suite une interprétation exacte de l'expérience de BUFFON. Les problèmes de cet ordre ne méritent d'ailleurs que peu d'attention, abstraction faite des développements mathématiques qu'ils font surgir. Etant donné que le monde compte plus de femmes que d'hommes, ne pourrait-on pas aussi bien se proposer de déterminer la probabilité de la préférence que la nature semble manifester à l'égard du sexe féminin?

C'est précisément parce que l'application du théorème de BAYES repose sur le principe subjectif qu'elle est loin de nous contenter et que nous croyons devoir recommander la plus haute circonspection quant au calcul des probabilités à postériori. Puisque l'application du théorème de BAYES embrasse néanmoins la théorie des erreurs et la statistique toute entière, il est essentiel de ne pas oublier qu'un matériel très nombreux est indispensable afin de pouvoir éliminer approximativement l'arbitraire dont les prémisses du calcul des probabilités à postériori sont entachées.

Nous avons signalé expressément qu'une probabilité à priori doit se ranger parmi les abstractions mathématiques. Il faut se garder d'y attacher une signification concrète; nous avons contesté la légitimité de voir dans le calcul des probabilités une arme nous mettant à même de prévoir les coups dans un jeu de hasard.

Le point de vue des partisans de la théorie dite théorie des fréquences dépasse le nôtre. Cette théorie, poussée et développée surtout par VON MISES, reconnaît à un événement fortuit une probabilité dans les cas, et alors seulement, où un examen, comportant des épreuves en très grande quantité, témoigne de l'existence d'un nombre dont la fréquence relative s'approche à mesure que le nombre des épreuves augmente. C'est à ce nombre limite que les partisans de la théorie des fréquences donnent le nom de probabilité.

Il est incontestable que la théorie des fréquences se présente sous une forme très séduisante. Elle fait notamment disparaître une pierre d'achoppement en rompant radicalement avec les définitions de la probabilité qui, comme celle donnée par LAPLACE, conduisent à un cercle vicieux. D'un autre côté, elle part d'une notion mathématique, savoir celle de limite. Dans la critique qu'il a adressée à la théorie des fréquences, KEYNES relève principalement, avec raison d'ailleurs, que celle-ci ne réserve aucune place à quantité d'événements qui supportent fort bien l'application de la définition classique de la probabilité [1]. Il nous est pourtant impossible de faire valoir contre la théorie de VON MISES cette citique-là; car, comme nous l'avons déjà fait remarquer, une probabilité qui ne cadre pas avec le schème de BERNOULLI ne se laisse jamais détacher de sa cosse théorique. Si la critique formulée par KEYNES ne nous satisfait pas, nous croyons d'autre part que la définition donnée dans la théorie des fréquences ne donne pas lieu à des points de vue essentiellement nouveaux et, ce qui est plus grave, nous la croyons assise sur une base mal choisie. Comme le développement de la théorie est dû surtout à VON MISES, nous allons baser nos considérations critiques sur l'exposé donné par cet auteur [2].

Selon VON MISES, il est absurde de parler de la probabilité d'un *événement fortuit déterminé; la notion de probabilité ne doit être* employée que par rapport à un collectif. Sous ce nom de collectif il faut entendre une série d'observations se prêtant à un prolongement indéfini et satisfaisant aux deux conditions que voici: la fréquence relative du phénomène doit posséder une limite; puis, il faut qu'une certaine irrégularité dans le résultat témoigne d'épreuves dépendant du hasard. Afin de mettre les choses en accord avec ces conditions, VON MISES s'adresse aux renseignements fournis par l'expérience. D'après lui ces renseignements, ceux tirés de l'expérience des maisons de jeu notamment, dénotent d'une manière convaincante l'existence de collectifs.

Des considérations de cette nature sont loin d'être objectives et l'on peut douter qu'il soit légitime d'y baser une théorie. Que VON MISES estime les matériaux disponibles suffisamment nombreux, libre à lui. Mais ceci n'autorise nullement à déclarer atteints d'un scepticisme inadmissible, ceux qui se permettent de penser différem-

---

1) J. M. Keynes: *A treatise on probability* (London, 1929); p. 92—110.

2) R. von Mises: *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (Wien, 1928). Du même: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* (Leipzig und Wien, 1931).

ment. Comme les faits d'expérience sont d'importance décisive pour la théorie des fréquences, VON MISES établit un parallèle en faisant intervenir la physique mathématique. La dernière ne s'adresse-t-elle pas à l'expérience pour déduire la loi de la conservation de l'énergie? Pareille comparaison nous semble défectueuse. Non seulement parce que la loi de la conservation de l'énergie repose sur une expérience beaucoup plus riche, mais encore parce que l'équivalence du travail mécanique et des quantités de chaleur se laisse plus facilement concevoir comme un fait d'expérience qu'il n'en est le cas pour une relation limite. Outre cela, le physicien a l'avantage de pouvoir s'appuyer sur les recherches théoriques de ROBERT MAYER.

Nous rejetons également l'affirmation de VON MISES que sa théorie du calcul des probabilités est une science envisageant la nature sous forme mathématique. Afin de motiver sa manière de voir, il met sa théorie en parallèle avec la géométrie et avec la mécanique. Mais personne ne pourra admettre que les axiomes de ces disciplines soient comparables avec ceux de la théorie des fréquences. Nous doutons même qu'il soit possible de construire sur les définitions données par VON MISES une théorie mathématique complète des probabilités.

Est-ce bien exact de dire que la théorie des fréquences embrasse, en ce qui concerne les applications, un domaine plus étendu que celui occupé par la théorie classique? A cette question VON MISES donne à plusieurs reprises une réponse affirmative. Il se croit par suite fondé à déclarer que les avantages sont du côté de sa méthode. Il est vrai qu'il fait abstraction de tous les phénomènes ne se présentant pas en longues séries, mais d'autre part il constate avec satisfaction que, à l'encontre de la théorie classique, la sienne permet d'établir des probabilités se rapportant à quantité de collectifs sur lesquels la théorie classique demeure absolument sans prise.

Nous tenons à remarquer d'abord, qu'à bien considérer les choses, il est absurde de vouloir réserver dans la théorie des fréquences une place aux probabilités numériques. L'expérience rend souvent l'idée de l'existence d'une limite plausible, nous n'en disconvenons pas; mais il est toujours vain de vouloir déterminer la valeur de cette limite. Il se peut bien que l'inconvénient d'une semblable impossibilité ne soit pas très grave. Si nous relevons la question présente, c'est uniquement parce que VON MISES introduit, sans hésiter, la probabilité $\frac{1}{2}$ par rapport à un collectif obtenu en jetant plusieurs fois de suite une pièce de monnaie de construction presque parfaite, et de même la probabilité $^{1}/_{6}$ en opérant avec un dé de fabrication très soignée. Ces deux valeurs, $\frac{1}{2}$ et $^{1}/_{6}$, ne découlent pas de l'expérience fournie par les maisons de jeu, mais sont empruntées à la théorie classique.

C'est en demandant l'attention pour le cas d'un dé pipé que VON MISES croit avoir cause gagnée. Il prétend que sa méthode reste alors applicable intégralement, la méthode classique se heurtant par contre à la difficulté de l'absence de l'équivalence des différents cas entre eux. On pourrait faire l'objection que les prétendus avantages de la théorie des fréquences sont nuls. En effet, cette théorie introduit une probabilité dont l'approximation est pratiquement impossible. Dans le cas d'un dé pipé, l'école de LAPLACE renonce d'avance à tout calcul direct de la probabilité.

Il y a plus. La méthode classique s'occupe aussi d'un calcul des probabilités à postériori. Elle y fait entrer les problèmes incompatibles avec le schéma des urnes. Nous n'avons pas du tout nié que l'application du théorème de BAYES offre le danger de conduire à des conclusions fautives; mais nous n'avons pas manqué de faire remarquer d'autre part que la multiplication des épreuves produit un effet niveleur. Si l'on demande maintenant d'introduire des probabilités pour un dé pipé, nous pouvons penser, en théorie, une série illimitée d'épreuves et déclarer les probabilités à postériori qui en résultent à l'abri de l'arbitraire impliqué dans les prémisses.

Des considérations analogues peuvent être faites à propos de la statistique de la mortalité. Dans quelle mesure le calcul des probabilités classique offre ici un guide, c'est ce qui sera examiné au chapitre suivant. Faisons toutefois dès à présent la remarque que VON MISES demande à tort sur quels cas équivalents la définition de la probabilité de vie repose dans la théorie classique. Tout le monde sait que les partisans de cette théorie considèrent la statistique comme appartenant au domaine du calcul des probabilités à postériori.

On ne peut pas nier que presque toutes les applications du calcul des probabilités ne se comportent point avec la définition directe. Ceci fait dire à VON MISES que le concept classique de la probabilité ne présente aucune valeur pour caractériser les événements fortuits. Conclusion bien singulière! La définition habituelle de la dérivée d'une fonction a été remplacée par RIEMANN par une intégrale dans le cas de dérivées d'ordre fractionnaire ou négatif. Est-ce là un motif pour condamner et abandonner la définition habituelle? Evidemment non. Eh bien! on peut de même maintenir fort bien la définition classique de la probabilité, bien que la théorie des probabilités à postériori soit indispensable pour élucider quantité de phénomènes incompatibles avec cette définition.

CHAPITRE IV.

LA STATISTIQUE DE LA MORTALITÉ.

Sur la trace de CHARLIER[1]), on est amené à distinguer dans la statistique mathématique une partie homograde et une partie hétérograde. La première est régie par la théorie de LEXIS et s'occupe des cas où les observations portant un attribut commun, l'offrent au même degré; la seconde est sous la dépendance de la méthode des fonctions de fréquence et traite des cas où les observations portant un attribut commun, le possèdent à des degrés différents.

Lorsque le matériel tiré de l'expérience nous a servi à construire une série de fréquences homograde, il faut se garder de déclarer prématurément le théorème de BERNOULLI applicable. Les fondateurs de la statistique mathématique ont négligé de prendre en cette matière les précautions indispensables. Ils postulaient simplement le théorème de BERNOULLI applicable. Attitude absolument inadmissible! Elle a conduit LAPLACE à des conclusions erronées lors de son travail relatif au dénombrement de la population générale de la France.

Les théories plus modernes de la statistique ont été préparées surtout par LEXIS. Nous lui devons en premier lieu un critérium permettant d'apprécier si une série statistique cadre, ou non, avec le schéma de BERNOULLI. Il a donné également un moyen pour reconnaître les influences perturbatrices dans le cas d'une série à dispersion anormale.

Puisque nous comptons baser nos considérations principalement sur les recherches de LEXIS, nous allons reproduire, mais de manière fort brève, les développements de ce savant. Supposons que dans n séries, dont chacune compte s observations, l'événement E s'est présenté successivement $m_1, m_2 \dots m_n$ fois. Si une probabilité fixe p correspond à E, les quotients:

$$\frac{m_1}{s}, \frac{m_2}{s} \dots \frac{m_n}{s}$$

1) C. V. L. Charlier: *Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik.* Zweite Auflage (Lund, 1920).

peuvent s'interpréter comme des observations également précises de la grandeur inconnue p, et la valeur la plus probable de cette grandeur sera la moyenne arithmétique:

$$p' = \frac{m_1 + m_2 + \ldots . + m_n}{n\,s}$$

On peut calculer suivant deux méthodes le module de précision h. En vertu du théorème de BERNOULLI, nous trouvons:

$$h_1 = \sqrt{\frac{s}{2p\,(1-p)}}$$

Puisque nous ne connaissons pas la valeur de p, l'expression précédente est remplacée par:

$$h' = \sqrt{\frac{s}{2p'\,(1-p')}}$$

En partant de la théorie des erreurs, l'on a en premier lieu:

$$h_2 = \sqrt{\frac{1}{2\,\varepsilon^2}}$$

Ici ε représente la vraie valeur de l'erreur moyenne. Comme nous l'ignorons également, nous nous contentons de l'expression:

$$h'' = \sqrt{\frac{n-1}{2\,[\delta^2]}}$$

dans laquelle:

$$[\delta^2] = \left(\frac{m_1}{s} - p'\right)^2 + \left(\frac{m_2}{s} - p'\right)^2 + \ldots . + \left(\frac{m_n}{s} - p'\right)^2$$

A la suite de LEXIS le premier procédé est souvent appelé: méthode statistique de calculer la précision; le second: méthode physique de calculer la précision [1]). Il est essentiel de remarquer que, dans l'une comme dans l'autre de ces deux méthodes, on a affaire à des probabilités et qu'en conséquence il n'est pas permis de s'attendre à voir la théorie et l'expérience s'accorder parfaitement.

---

[1]) W. Lexis: *Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik* (Jena, 1903). Pag. 130—169: *Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

Dans le cas d'une série obéissant à la loi des erreurs, LEXIS se sert de l'appellation: série typique. Le résultat fourni par l'expérience peut alors s'obtenir également en s'imaginant un jeu de hasard, à la base duquel se trouve, soit une probabilité fixe, soit une probabilité variant fortuitement. La considération du coefficient de divergence:

$$Q = \frac{h'}{h''}$$

fait apparaître trois cas:

1. $Q = 1$, caractéristique d'une série typique à dispersion normale.

Le schéma des urnes se laisse représenter par une urne contenant des boules rouges et des boules noires dans une proportion invariable.

2. $Q > 1$, caractéristique d'une série typique à dispersion supernormale.

Le schéma des urnes auquel pareille série se laisse ramener, peut être construit ainsi: une boîte contient, en grandes quantités et dans une proportion déterminée, des boules rouges et noires. C'est en tirant au hasard dans cette boîte qu'on place des boules dans différentes urnes. Il est clair que la série de valeurs qu'on obtient en notant pour chaque urne la probabilité d'y extraire une boule de couleur déterminée, rouge par exemple, aura l'aspect d'une suite amenée entièrement par le jeu du hasard. On fait ensuite dans chaque urne s extractions successives, en remettant chaque fois la boule tirée. Chaque série se caractérise par une probabilité invariable. qui lui appartient en propre, et les fluctuations qu'on constate dans l'ensemble des probabilités sont dues à l'action du hasard. On voit aisément que ceci entraîne une diminution du module de précision h'' et par conséquent un coefficient de divergence supérieur à l'unité.

3. $Q < 1$, caractéristique d'une série typique à dispersion sousnormale.

Ce cas diffère essentiellement des deux autres. Dans une série à dispersion normale, les fluctuations offrent les caractères élémentaires du hasard, ce qui est toujours signe d'une probabilité fixe. Dans le cas d'une série à dispersion supernormale, les fluctuations offrent plus d'amplitude du fait de l'influence exercée par le hasard sur la valeur de la probabilité, quand on passe d'une série à celle qui la suit. Les deux premiers cas se ressemblent, en tant que les observations sont indépendantes les unes des autres et non conditionnées par le résultat final.

Une série à dispersion sous-normale offre, par contre, des fluctuations d'allure plus faible, et cette circonstance dénoterait l'action d'un facteur serrant les termes de la série plus étroitement autour de la valeur moyenne. L'existence d'un tel facteur mystérieux et compensateur se supporte cependant difficilement avec la nature du hasard. En effet, le hasard implique précisément l'indépendance des observations entre elles. Aussi, d'après LEXIS, les séries à dispersion sous-normale n'existent pas réellement. C'est pourquoi il s'est abstenu de donner un schéma des urnes se rapportant à cette espèce de séries.

Les travaux de POISSON avaient cependant déjà fait connaître le schéma approprié. Soit s urnes contenant toutes en grand nombre des boules rouges et noires, mais de composition différente. On extrait de chaque urne une boule en la remettant. Cette opération est répétée n fois de suite. Il est évident que les épreuves d'une série, obtenue en puisant successivement une fois dans chacune des s urnes, s'appuient sur des probabilités différentes et que l'ensemble formé par ces s probabilités est exactement le même pour chacune des n séries. Des écarts considérables sont à présent moins probables que dans le schéma de BERNOULLI et la dispersion devient par suite sous-normale.

La façon dont le schéma général de POISSON a été élaboré montre clairement que le facteur compensateur, qui agit dans le sens de la moyenne, est exempt de toute signification mystérieuse. L'indépendance des observations séparées n'est entamée d'aucune façon et ainsi l'action du hasard se maintient intégralement. Voici l'élément qui est typique pour le schéma: les épreuves d'une même série ont des probabilités distinctes, mais l'ensemble de ces probabilités se transporte sans altération quand on passe d'une série à la suivante. Il en résulte des fluctuations moins prononcées que dans le cas d'une probabilité fixe dans chaque série. Relevons, en passant, qu'il est bien possible de construire un schéma de POISSON de manière telle que l'indépendance mutuelle des observations n'existe plus. On peut y arriver en faisant dans une urne contenant des boules rouges et des boules noires, en proportion déterminée une fois pour toutes, s fois de suite une boule en ne remettant pas les boules extraites. Cette opération est répétée n fois. Si, dans l'une quelconque des n séries, on compte quelques boules rouges se suivant immédiatement, la composition de l'urne se trouve évidemment modifiée en faveur des boules noires. Celles-ci se trouveront en proportion plus forte qu'auparavent ou, autrement dit, elles offriront une probabilité plus grande. Dans l'exemple ci-dessus, il est donc facile de reconnaître le facteur compensateur qui fait la distribution autour de la moyenne plus serrée.

L'introduction du schéma général de POISSON montre de façon évidente qu'une série typique à dispersion sous-normale n'est pas du tout illusoire. Il est surprenant que LEXIS se soit rendu si peu compte d'une telle possibilité. Il répète maintefois que les phénomènes statistiques offrant le caractère typique ne peuvent avoir un coefficient de divergence inférieur à l'unité que par suite de circonstances exceptionnelles. Il est vrai qu'il cite un phénomène susceptible de présenter parfois la dispersion sous-normale: les accidents dans l'armée, dont le nombre varie évidemment suivant l'arme envisagée (infanterie, cavalerie, artillerie). Sous ce rapport, LEXIS se sert expressément de l'expression: dispersion sous-normale apparente, puisque chaque arme, considérée séparément, donne lieu à une dispersion, soit normale, soit supernormale[1]).

Dans la généralité des cas l'observation de LEXIS n'est pas dénuée de justesse. Toutefois, il est possible de s'imaginer, du moins en théorie, des cas où la différenciation du système des probabilités, poussée trop loin, empêche d'aboutir à un partage en groupes suffisamment étendus. En outre, la méthode de LEXIS demande tout d'abord l'enregistrement statistique du phénomène, envisagé dans toute sa plénitude; les essais d'arriver, au moyen d'une analyse du matériel fourni par l'observation, à des points de vue nouveaux, n'y viennent qu'en second lieu.

Dans la statistique homograde, dont nous nous occuperons exclusivement parce que le problème de la mortalité, sujet de notre étude, en fait partie, on observe dans un groupe d'individus — nous parlerons pour abréger d'une population — en premier lieu le nombre de ceux qui offrent un certain attribut. Dans le langage du calcul

---

[1]) W. Lexis: *Abhandlungen*, et caetera; l.c. p. 228, 229.

des probabilités on peut parler d'un événement alternatif E dont on se propose d'examiner la fréquence. En général les individus donneront inégalement prise au phénomène étudié et nous supposerons par suite la population partagée en k sous-groupes dont chacun offre de l'homogénéité quant à l'action de E. Afin de simplifier, nous admettrons que chaque sous-groupe compte s individus. Les k nombres obtenus en examinant les individus de chaque groupe au point de vue de l'attribut envisagé, varieront pour deux raisons: d'abord, les différents groupes éprouveront inégalement l'influence de E; et puis, la suite présentera des fluctuations dues à la seule action du hasard, comme il arrive d'ailleurs toujours dans le cas d'un grand nombre d'observations.

Le degré de susceptibilité d'une population vis-à-vis d'un phénomène sera en général variable avec le temps. Quand on répète par conséquent n fois l'expérience que nous venons d'exposer, et cela par intervalles tous égaux à l'unité de temps, chaque groupe donnera naissance à une suite de n nombres tels que leurs fluctuations doivent être attribuées à deux causes: l'inégale réaction des groupes contre l'action exercée par le phénomène étudié et l'influence du hasard pur.

Désignons, en toute généralité, par m le nombre de fois que l'événement E se manifeste parmi les s individus d'un groupe. On peut alors représenter le matériel total par la matrice:

$$\begin{array}{lllllll}
m_{11}^{(11)} & m_{12}^{(12)} & m_{13}^{(13)} & \ldots & m_{1j}^{(1j)} & \ldots & m_{1k}^{(1k)} \\
m_{21}^{(21)} & m_{22}^{(22)} & m_{23}^{(23)} & \ldots & m_{2j}^{(2j)} & \ldots & m_{2k}^{(2k)} \\
m_{31}^{(31)} & m_{32}^{(32)} & m_{33}^{(33)} & \ldots & m_{3j}^{(3j)} & \ldots & m_{3k}^{(3k)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_{i1}^{(i1)} & m_{i2}^{(i2)} & m_{i3}^{(i3)} & \ldots & m_{ij}^{(ij)} & \ldots & m_{ik}^{(ik)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_{n1}^{(n1)} & m_{n2}^{(n2)} & m_{n3}^{(n3)} & \ldots & m_{nj}^{(nj)} & \ldots & m_{nk}^{(nk)}
\end{array}$$

les indices placés en bas et à droite indiquant les variations intrinsèques, les indices entre crochets se rapportant aux fluctuations normales dues à l'action du hasard pur.

On peut maintenant écrire pour chaque ligne la somme de ses éléments et faire de même pour chaque colonne. Si nous remplaçons par 0 l'indice sur lequel porte la sommation, nous aurons dans le sens horizontal:

$$\sum_{j=1}^{k} m_{i\,j}^{(i\,j)} = m_{i\,0}^{(i\,0)}$$

et dans le sens vertical:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i\,j}^{(i\,j)} = m_{0\,j}^{(0\,j)}$$

Du point de vue mathématique, les deux procédés de sommation se valent évidemment; mais en statistique, le second joue un rôle plutôt effacé. En effet, le plus souvent le partage de la population en groupes homogènes sera loin d'être possible. Au surplus, la disposition des colonnes est entièrement arbitraire, tandis que celle des lignes se trouve complètement déterminée par la succession des époques d'observation. Aussi ferons-nous dans la suite toujours usage des sommations en sens horizontal.

Le premier cas à envisager est celui d'une population homogène et ne subissant point de variations intrinsèques quant à la manière de se comporter vis-à-vis de E. La matrice de toute à l'heure se réduit à:

$$| m^{(i\,j)} |$$

et la suite de nombres:

$$\{ m^{(i\,0)} \}$$

offre le caractère d'un événement fortuit normal (schéma de BERNOULLI). C'est dans ce cas seulement que le phénomène envisagé s'appuie sur une probabilité fixe.

Un autre cas est représenté par une population hétérogène et telle que chacun des groupes composants manifeste l'attribut étudié avec une intensité à l'abri de toute variation intrinsèque. Cette fois la matrice sera:

$$| m_{j}^{(i\,j)} |$$

et la suite:

$$\{ m_{0}^{(i\,0)} \}$$

offre la dispersion sous-normale (schéma de POISSON). Lorsqu'on se trouve en présence d'un phénomène de cette espèce, il est légitime d'attribuer à la population une probabilité moyenne. La théorie enseigne que les groupes doivent se comporter très différemment en face de E pour donner un coefficient de divergence notablement inférieur à l'unité.

La troisième possibilité est celle d'une population homogène montrant une intensité variable avec le temps. La matrice prend la forme:

$$| m_i^{(ij)} |$$

et la suite:

$$\{ m_i^{(i0)} \}$$

offre le caractère de la dispersion supernormale (schéma de LEXIS). Persuadé que la statistique sociale révèle surtout des phénomènes de ce genre, LEXIS s'est attaché particulièrement à développer le schéma qui s'y rapporte.

Le cas le plus général est celui d'une population hétérogène dont chaque sous-groupe offre une intensité à variations intrinsèques. La matrice:

$$| m_{ij}^{(ij)} |$$

conduit à la suite:

$$\{ m_{i0}^{(i0)} \}$$

dont la dispersion ne se laisse pas déterminer à priori (schéma de LEXIS-POISSON).

Pour éviter les malentendus, nous devons faire suivre la considération précédente de quelques remarques. La première qui demande l'attention se rattache à cette circonstance que nous avons fait les sommations toujours en sens horizontal parce qu'on a le plus souvent affaire à des séries d'observation disposées suivant leur ordre chronologique. La conclusion relative à la dispersion sous-normale d'une série de POISSON reste néanmoins valable, chaque fois que le partage de la population en groupes homogènes échoue.

Puis, il convient de faire remarquer que nous avons laissé de côté la manière dont l'attribut varie en intensité quand le phénomène envisagé rentre dans le schéma de LEXIS. Si cette intensité varie non selon le hasard, mais de manière évolutive, nous nous trouvons en présence d'une série non typique, quoique de dispersion supernormale. Quand on trouve par conséquent un coefficient de divergence supérieur à l'unité, il sera nécessaire de recourir à la loi des erreurs de GAUSS pour savoir si la série offre des fluctuations déterminées par le hasard.

Nous avons déjà dit que LEXIS n'a parlé que fort superficiellement de l'existence des séries typiques à dispersion sous-normale, et il va de soi que cet auteur s'est abstenu de toute tentative pour ramener les phénomènes statistiques au schéma de probabilité le plus général.

Voici comment on peut opérer la construction de ce schéma le plus général. Considérons un grand nombre, soit $n \times k$, d'urnes renfermant chacune des boules rouges et des boules noires, la proportion des deux couleurs différant d'une urne à l'autre. Nous pouvons écrire une matrice reproduisant les résultats obtenus en faisant dans chaque urne un certain nombre de tirages. Une sommation soit en sens horizontal, soit en sens vertical, conduit ensuite à une série qui se laisse évidemment concevoir comme une combinaison du schéma de LEXIS et du schéma de POISSON.

On peut supposer, sans crainte de se tromper, que la plupart des phénomènes rencontrés en statistique homograde répondent à ce schéma général et, à l'égard de la matrice écrite plus haut, il est permis de dire que la majorité des cas offre des variations suivant les deux sens à la fois. Les groupes dont la population se compose manifestent l'attribut étudié avec des intensités différentes et de plus, chaque groupe offre par rapport à cet attribut une susceptibilité qui varie d'ordinaire avec le temps d'une manière symptomatique.

Il est évident qu'en face de circonstances semblables, il est tout à fait impossible d'affirmer, à priori, quelque chose concernant la dispersion qui caractérise la suite:

$$m_1, m_2, m_3 \ldots . m_n$$

résultant d'une période de n ans. Ce qui est cependant hors de doute, c'est que la tendance à diverger, due aux variations en sens vertical, trouve compensation entière, ou partielle, dans la tendance à égaler, causée par les variations en sens horizontal. Si le calcul fait apparaître une dispersion normale, un partage de la population en groupes homogènes doit être essayé; si la dispersion se révèle encore normale pour les groupes partiels, il sera généralement permis de déclarer qu'une probabilité invariable caractérise le phénomène étudié.

Un partage de la population en groupes donnera lieu à une dispersion supernormale plus accentuée, si les variations se manifestent aussi dans le sens horizontal, le calcul se faisant séparément pour les différents groupes partiels. Dans le cas d'un nombre pas trop restreint de groupes, on pourra faire subir à la matrice une rotation de 90 degrés. Une sommation dans le sens horizontal fournit alors la suite:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}^{(ij)} = m_{0j}^{(0j)}$$

dont la dispersion est autre.

Par rapport à la remarque de LEXIS, suivant laquelle une division en groupes homogènes peut faire disparaître une dispersion sous-normale, nous avons déjà dit qu'elle est inexacte, chaque fois que l'action exercée par la différenciation du système des chances est intense. Les phénomènes de la mortalité humaine sont particulièrement caractéristiques à cet égard, et c'est pour cette raison que nous allons les examiner à la lumière des considérations précédentes.

Voici la méthode employée généralement pour déterminer la mortalité humaine. On établit, pour une suite d'années successives, des taux moyens de mortalité aux divers âges. Un tel taux, relatif à l'âge x et à une année déterminée, est le quotient du nombre des décès survenus à l'âge x, au cours de cette année, par le nombre des individus d'âge x en vie au début de la même année. Comme les émigrations et les immigrations sont sans influence sur ce que notre raisonnement offre d'essentiel, nous faisons abstraction de toute correction pour en tenir compte.

Nous représentons les nombres des individus décédés à l'âge x, au cours d'une période comprenant n années, par la suite:

$$m_1^{(x)},\ m_2^{(x)} \ldots . m_n^{(x)}$$

Pour simplifier, nous supposerons l'effectif des individus d'âge x en vie au début d'une année, toujours égal à un nombre fixe, soit $s^{(x)}$. Les quotients:

$$\frac{m_1^{(x)}}{s^{(x)}}, \frac{m_2^{(x)}}{s^{(x)}} \dots \frac{m_n^{(x)}}{s^{(x)}}$$

peuvent alors être considérés comme des déterminations empiriques du taux de mortalité à l'âge x.

On peut maintenant calculer le coefficient de divergence d'une série d'observations s'étendant sur une période de dix années ou plus, afin de se former quelque idée du caractère du phénomène. En ce qui concerne la mortalité humaine, notre connaissance est suffisante pour nous mettre à même d'esquisser, à grands traits, un schéma permettant, mieux que le coefficient de divergence, de répondre à la question de savoir jusqu'à quel point les quotients de mortalité observés se laissent considérer comme des estimations empiriques de probabilités mathématiques.

On peut tout d'abord voir dans les individus de même âge et appartenant à une même population, un groupe homogène d'éléments soumis à l'influence d'un très grand nombre de causes fortuites et indépendantes les unes des autres. Parmi ces causes, certaines peuvent être considérées comme amenant la mort avant la fin de l'année, tandis que d'autres sont de nature à éliminer les facteurs mortels. Le rapport des nombres de ces deux sortes de causes doit se concevoir comme lié à l'âge. Cette façon d'envisager les choses conduit immédiatement au schéma de BERNOULLI, confère à chacun des âges un rapport fixe de boules blanches et de boules noires qui lui est spécial. Si, au surplus, l'ensemble des causes qui préside à l'allure de la mortalité demeure le même d'une année à l'autre, une série d'observations constituée par les quotients de mortalité relatifs à un âge déterminé, n'offrira que des fluctuations purement et simplement accidentelles ou, autrement dit, il sera hautement probable que le coefficient de divergence ne diffère que fort peu de l'unité.

La réalité des choses se présente cependant sous un aspect plus compliqué. On s'approche déjà fortement de cette réalité en considérant la manière dont les décès parmi un groupe d'individus de même âge se suivent dans le temps, comme dépendant dans une forte mesure de facteurs tels que la complexion, le tempérament, et d'autres semblables, qui diffèrent d'un individu à l'autre. Il est bien certain que ces facteurs sont étroitement liés aux phénomènes de l'hérédité. En outre, le genre de vie, la profession, et d'autres facteurs de cette espèce, auront leur répercussion sur la résistance qu'un individu présente aux facteurs démolissants. Il est évidemment impossible d'approfondir ici en raisonnant à priori. Un examen médical des plus minutieux serait même impropre à fournir une analyse satisfaisante. Quoiqu'il en soit, nous pouvons sans inconvénient laisser de côté la possibilité d'un partage en groupes homogènes; ce qui suffit, c'est d'admettre que ceux qui composent un groupe d'individus de même âge, sont inégalement prédisposés à la mort. S'il en est ainsi, il est plausible d'attribuer à cette dissimilitude de comportement une action assez importante, dès que le matériel examiné embrasse une population toute entière.

Qu'un tel matériel offre, en effet, une différenciation allant très loin, c'est ce que les recherches faites par LEXIS mettent en lumière. En ce qui concerne la force de résistance vis-à-vis de la mort, il distingue dans une population trois catégories principales, à savoir: les vies impropres, qui succombent sans avoir atteint dix ans; les vies tarées, qui meurent dans l'intervalle limité par les âges de dix et de soixante ans, les nombres des décès parmi ce groupe allant en croissant à mesure que l'âge du décès s'approche de la soixantaine; les vies normales, groupe caractérisé par ce fait que les décès se massent aux environs de l'âge soixante-dix [1]). Lorsqu'on ne fait pas entrer en ligne de compte les âges de l'enfance, il reste toujours qu'un groupe composé d'individus n'ayant pas dépassé la soixantaine, mais tous de même âge, se laisse partager en deux sous-groupes tels, que chacun d'eux se compose de têtes que la mort menace très différemment. Ceci revient à dire que les individus d'un même groupe offrent des chances de décès s'écartant de beaucoup les uns des autres. Au delà de l'âge soixante, on ne rencontre que des vies normales. A celles-ci le schéma de BERNOULLI serait peut-être applicable.

Envisageons maintenant un âge x, situé entre 10 et 60. Durant une suite d'années successives, on écrit pour chaque année le nombre des décès survenus à un âge compris entre x et $x + 1$. D'après ce

[1]) W. Lexis: *Abhandlungen*, et caetera; l.c. p. 87—91.

que nous avons exposé plus haut, il y aura variation dans le sens horizontal quand on destine le matériel obtenu à construire une matrice calquée sur celle que nous avons présentée, et commentée, dans notre raisonnement plus général de tout à l'heure. Dans l'hypothèse que chaque âge possède sa mortalité propre, invariable durant toute la période d'observation, ou, si l'on veut, si l'intensité de la mortalité pour un âge déterminé n'est point sujette à variation au cours de cette période, le schéma de POISSON pourra jouer, c'est à dire, il y aura dispersion sous-normale, peu prononcée toutefois. Il est évident que déterminer un schéma tenant compte du rapport des facteurs, avançant la mort, à ceux, éloignant celle-ci, est chose impossible à faire avec quelque exactitude. Même des observations s'étendant sur une période de durée fort longue seraient alors peu efficaces. Lorsque le rapport en question est variable, la construction effective d'une matrice devient impossible parce que nous ne savons pas comment ce rapport varie en pareil cas. Mais ceci ne porte aucune atteinte au raisonnement qui nous a fait conclure à l'existence d'une dispersion sous-normale.

Il est à remarquer que ce résultat ne se laisse pas vérifier d'une manière directe; car force nous est de renoncer à l'hypothèse d'une mortalité invariable avec l'époque envisagé ou, autrement dit, cette fois nous tombons sur une matrice variable aussi bien dans le sens vertical que dans le sens horizontal. Expliquons-nous. L'action exercée par les nombreux facteurs qui font varier l'intensité de la mortalité, selon l'année choisie pour sa détermination, entraîne un flottement dans les nombres des décès relatifs à un même âge; mais, le fait est digne d'attention, il faut se garder de confondre les fluctuations fortuites ainsi constatées avec les fluctuations fortuites normales, qu'on rencontre toujours, aussi bien dans le cas présent que dans celui d'une mortalité d'intensité invariable. L'action occupant le premier plan émane cependant des fluctuations appelées symptomatiques et, plus spécialement, des fluctuations à caractère évolutif, qui interprêtent le fait capital de la statistique démographique: la diminution graduelle de la mortalité humaine. Devant cette affirmation indéniable, il faut bien reconnaître que la variation en sens vertical trouve son explication surtout, et avant tout, dans les variations symptomatiques et non dans les variations fortuites.

La mortalité humaine nous apparaît donc comme un phénomène réductible à une combinaison des schémas de POISSON et de LEXIS, et offrant par conséquent une dispersion, pour le moins normale, mais fort probablement légèrement supernormale. Afin de vérifier cette conclusion, il faut répartir la population, aussi bien que faire se pourra, en groupes homogènes; pour chaque groupe, pris séparément l'affaiblissement de la variation en sens horizontal détermine alors, en général, un coefficient de divergence supérieur à celui relatif à la population totale [1]).

Il résulte de ce qui précède que la connaissance du coefficient de divergence ne suffit pas par elle-même à l'établissement d'une classification des phénomènes statistiques. Ainsi, une dispersion normale peut être due à cette circonstance qu'une probabilité mathématique fixe se trouve à la base du phénomène; l'exemple que LEXIS donne de ce cas, à savoir le rapport du nombre des naissances masculines au nombre des naissances féminines, nous semble bien fondé. Une autre catégorie intéressante est celle des phénomènes à dispersion presque normale et montrant variation dans les deux sens, mais ceci de manière telle que les actions opposées se neutralisent au total. La mortalité humaine semble appartenir à cette catégorie. On a alors, comme nous l'avons vu, d'une part, les calculs de plusieurs statisticiens, dénotant, pour la plupart des âges, un coefficient de divergence un peu supérieur à l'unité, et, d'autre part, la matrice présentée par nous et revenant, pour le cas de la mortalité humaine, à la traduction symbolique d'une combinaison POISSON-LEXIS. Aussi se trompent-ils radicalement, les statisticiens qui, comme PEEK [2]) entre autres, invoquent la dispersion normale de la

---

1) Affirmer que les cas de mort prématurée trouvent leur explication dans la faible constitution des individus frappés, c'est évidemment considérer les choses d'une manière incomplète. Les épidémies, enlevant même les plus robustes, les accidents de nature à provoquer la mort instantanément ou à bref délai (ceux produits par l'électricité, les explosions, les moyens de transport modernes, les phénomènes sismiques), et quantité d'autres facteurs, exercent également leur influence. Pas besoin de dire qu'il est impossible d'arriver à un schéma tenant rigoureusement et complètement compte de l'action due à l'ensemble de tous ces facteurs.

2) J. H. Peek: *Das Problem vom Risiko*; l.c. p. 179.

mortalité humaine pour déclarer les fluctuations de cette mortalité conformes au schéma de BERNOULLI.

Au lieu d'observer une population totale, on peut examiner un groupe d'individus tirés de cette population par voie de sélection. C'est le cas d'une Compagnie d'assurances sur la vie qui emploie des tables de mortalité déduites des observations faites sur les têtes assurées chez elle. Il est clair que les matrices relatives aux données ainsi obtenues, offrent peu de variation dans le sens horizontal. Il en est d'ailleurs de même en ce qui concerne le sens vertical, car une supposition plausible consiste en ceci: la diminution de la mortalité se constate surtout parmi les individus dont la catégorie se trouve généralement peu représentée dans les portefeuilles des compagnies d'assurances sur la vie. Il est évidemment impossible de dire à priori si, dans ce cas encore, il y aura compensation suffisante pour que la dispersion se manifeste comme normale. D'autre part, les faits d'expérience font nettement apparaître ici une dispersion normale. La raison qui nous engage néanmoins à prendre, aussi dans ce cas, le schéma POISSON-LEXIS comme guide, c'est que les groupes obtenus par sélection laissent toujours beaucoup à désirer sous le rapport de l'homogénéité.

Nous devons nous demander maintenant à quel point le calcul des probabilités puisse être déclaré applicable aux problèmes de la statistique, en général, et aux problèmes de la mortalité, en particulier. C'est avec intention que nous posons la question sous cette forme, car nous voyons, conformément aux considérations du chapitre précédent, dans le calcul des probabilités une théorie purement mathématique, donc une théorie abstraite, dont l'origine et le développement n'ont rien à faire avec la statistique.

Ce qui est à constater en premier lieu, c'est que le calcul des probabilités nous met à même de construire un schéma fournissant un moyen efficace pour nous éclairer sur la fréquence d'un phénomène statistique. Sous ce rapport nous avons attiré l'attention sur la théorie de la dispersion et nous ajoutons que, depuis les recherches de LEXIS, personne ne doute plus de l'importance qu'il convient d'attribuer à une schématisation des observations statistiques. Il est vrai qu'une interprétation inexacte d'une dispersion déterminée peut conduire à des conclusions bizarres. Ainsi, déclarer un phénomène soumis à une probabilité constante dès qu'il offre une dispersion normale, c'est conclure prématurément. Une analyse sévère du schéma s'impose précisément dans ce cas. C'est elle qui fera trouver la bonne voie, et le statisticien qui aura calculé le coefficient de divergence fera bien de procéder ensuite à la construction et à l'analyse d'une matrice.

Il est évident qu'on ne se trouve pas toujours dans les conditions qui permettent d'agir de la sorte. Un coefficient de divergence tiré d'un matériel restreint mérite peu de confiance [1]). Mais ce qui peut surtout occasionner des difficultés, c'est la nécessité d'analyser, souvent au prix de beaucoup de patience et de bien du temps, les observations, afin de savoir le sens de variation à introduire dans les raisonnements sur la matrice. Une juste interprétation de la dispersion n'est possible qu'à condition de mettre auparavant pareille analyse à bonne fin. Dans cet ordre d'idées, nous avons déjà dit qu'il est fort souvent utile de procéder à une autre disposition des observations, en faisant par exemple subir une rotation à la matrice.

Notons, en passant, l'examen relatif à la stabilité des séries statistiques; c'est une question connexe à celle qui nous occupe et dans laquelle le calcul des probabilités joue aussi un grand rôle. Il serait intéressant de relever également dans cette théorie une lacune se rattachant, elle aussi, au schéma de POISSON, schéma négligé par LEXIS. Nous croyons cependant devoir laisser cette question de côté, puisque la tâche que nous avons assumée consiste principalement dans l'étude de la mortalité, phénomène symptomatique et ne rentrant par conséquent pas dans le cadre de la théorie de la stabilité.

---

[1]) Ceci n'implique pas que les séries d'observation peu prolongées doivent être négligées. Un théorème de L. von Bortkiewicz, commenté dans la publication de cet auteur *Das Gesetz der kleinen Zahlen* (Leipzig, 1898), enseigne même qu'en général la dispersion s'approche de la dispersion normale à mesure que l'étendue de la série diminue.

Sous ce rapport une autre publication du même auteur mérite d'être signalée. Elle a pour titre: *Der Wahrscheinlichkeitstheoretische Standpunkt im Lebensversicherungswesen* (Oesterreichische Revue, XXXI jrg. 1906, nos. 24—28) et montre que le schéma des urnes, bien entendu sous sa plus simple forme, ne s'applique pas à la mortalité. L'auteur appuie toutefois sa démonstration sur d'autres motifs que ceux allégués par nous. Vis-à-vis de Wagner, il maintient néanmoins le point de vue dogmatique.

Il apparaît donc que la statistique met à profit les résultats du calcul des probabilités, et cela du fait qu'elle s'occupe de phénomènes qui offrent, par suite de leur caractère aléatoire, en gros, une certaine *similitude* avec les phénomènes *marqués* par des probabilités mathématiques. On peut s'imaginer qu'un tel phénomène offre, pour chaque individu du groupe observé, une probabilité déterminée, alors même que toute détermination numérique de ces probabilités nous échappe complètement. C'est ce point de vue, tout à fait général, de considérer les choses, qui réserve à la mortalité humaine une place sur le domaine du calcul des probabilités, à condition toutefois que le statisticien n'oublie jamais le danger qui consiste à assimiler la mortalité à ce qui fait, au sens rigoureux du terme, l'object du calcul des probabilités.

Pas besoin de dire qu'en raison de ce qui précède, nous rejetons catégoriquement la manière dont plusieurs approchent souvent la notion même de probabilité de nombre de phénomènes statistiques. On se montre trop enclin à voir dans une dispersion à peu près normale, un critérium suffisant pour permettre l'attribution d'une probabilité mathématique au phénomène étudié. Outre cela, on prend alors, dans un but de commodité, pour valeur de cette probabilité la *moyenne arithmétique* des fréquences relatives déduites de l'observation.

Nous ferons porter nos objections à pareille manière d'agir uniquement sur la statistique de la mortalité, parce que la dernière constitue non seulement le domaine où de semblables objections se trouvent le plus négligées, mais encore celui formant l'une des bases essentielles de la science actuarielle. Nous avons déjà attiré l'attention sur ce fait que plusieurs recherches ont montré qu'un coefficient de divergence proche de l'unité caractérise, en général, les observations faites relativement à la mortalité et auxquelles l'année a servi de période. Or, c'est précisément ce résultat qu'on invoque pour se déclarer en droit d'attribuer aux quotients de mortalité les caractères propres aux probabilités mathématiques.

Une première objection consiste en ce que les fréquences relatives tirées, en matière de mortalité, des observations, ne supportent *jamais l'identification* à des probabilités *à priori*; ces fréquences relatives ne représentent en réalité que les valeurs auxquelles l'hypothèse la plus probable donne naissance. Même à supposer une telle identification admissible, une autre objection se dresse d'une manière inébranlable: dans les cas où des observations sur la mortalité dénotent une dispersion sensiblement normale, le schéma des urnes, loin d'offrir les boules colorées dans une proportion toujours la même, est au contraire une combinaison du schéma de POISSON avec celui de LEXIS, les deux unis de manière telle que les variations dans les deux sens se détruisent très sensiblement. C'est l'oubli de cette circonstance qui donne lieu à des conclusions inexactes, dès qu'on opère avec des quotients de mortalité envisagés indûment comme des probabilités mathématiques.

Supposons, pour commencer, le cas d'observations se rapportant à une même année. On a déduit alors une fréquence relative au moyen d'une population hétérogène et composée d'individus offrant le même âge, x par exemple. Donner ensuite, à la valeur moyenne ainsi obtenue, la signification d'une probabilité de décès, c'est se rendre nécessairement dupe de certaines conséquences introduites du même coup.

En effet, nous avons montré, dans le chapitre précédent, la nécessité d'une série d'épreuves très longue et, en outre, effectuée dans des conditions invariables, pour qu'une probabilité mathématique finisse par acquérir une signification moins abstraite. Or une telle éventualité est exclue en ce qui concerne la mortalité. Un groupe nombreux d'individus d'âge x plus ou moins homogène, comme exerçant par exemple la même profession, montrera une allure de mortalité s'écartant, en général, fortement de l'image conforme à la probabilité q_x de la population totale.

On peut pour cette raison limiter l'application et convenir qu'un taux moyen de mortalité sera employé seulement dans le cas d'un groupe offrant une ressemblance aussi forte que possible avec le groupe qui a servi à la détermination de ce taux. Il y a toutefois beaucoup d'incertitude quant à une juste délimitation d'une telle ressemblance. Du reste, ça ne mène pas loin que de restreindre le domaine des applications. Le nombre des décès dans le nouveau groupe sera sans doute proportionnel à son étendue. Sinon, comment expliquer la stabilité relative de la mortalité? Mais ce qui est essentiel, c'est l'allure des écarts dans de groupes plus petits. Il est bien certain que ces écarts-là sont loin d'obéir aux règles qui caractérisent une probabilité constante.

Si les observations qui ont servi à déterminer la fréquence relative q_x s'étendent sur un grand nombre d'années, la situation devient encore plus embarrassante. En effet, des variations de nature extrêmement différente ont alors concouru à la formation de la fréquence relative, et prendre celle-ci pour la probabilité de décès d'un individu d'âge x, ce serait niveler et embrouiller les conditions caractéristiques de la mortalité humaine, leur ôter en définitive toute valeur scientifique.

Y a-t-il une probabilité déterminée pour qu'il pleuve demain? Relativement au phénomène de la pluie les documents statistiques ne manquent pas. Durant de longues périodes déjà, les stations météorologiques ont enregistré le nombre annuel de jours de pluie. Tout le monde traitera, à coup sûr, la question posée de ridicule, indigne d'une réponse sérieuse. Le temps qu'il fera demain ne sera-t-il pas tout autre selon que le soleil illumine aujourd'hui la terre de tout son éclat, ou qu'il se masque, au contraire, derrière des nuages chevauchant dans un ciel gris et bas? Quand on demande la probabilité pour qu'il pleuve à une date future plus éloignée, la réponse dépendra de la saison comprenant la date choisie. Lorsqu'on ne tient pas compte de cette circonstance, on peut prendre pour la probabilité demandée la moyenne de toutes les fréquences relatives obtenues, mais personne ne niera qu'une telle solution puisse satisfaire seulement ceux qui prennent plaisir à attribuer une probabilité numérique à n'importe quel événement aléatoire.

Le cas des probabilités de décès nous semble analogue à celui des probabilités des jours de pluie. Se baser sur une statistique embrassant une population entière, pour attribuer, à un individu d'âge 40, une probabilité de décès égale à 0,01, c'est affirmer, tout au plus, qu'en vertu des documents statistiques recueillis, de tous les individus qui ont atteint l'âge 40 la centième partie a succombé sans avoir atteint l'âge 41. Voilà tout! Mais le nombre 0,01 n'est nullement caractéristique pour un individu d'âge 40, et il ne faut pas s'attendre à voir apparaître, dans une série de groupes, des écarts obéissant aux règles connues.

Il va de soi que nous jugeons la notion de probabilité de décès, dont nous venons de mettre en évidence le manque de précision, superflue en statistique. Les assurances sur la vie à part, il est en effet difficile de citer un domaine où les probabilités de décès trouvent application.

Nous allons par suite développer, dans les deux chapitres qui vont suivre maintenant, nos objections contre l'emploi de la notion de probabilité dans la théorie actuarielle. Nous essayerons, en même temps, d'indiquer une méthode plus satisfaisante que celle en usage actuellement.

L'examen théorique de la question ne saurait, pas plus que la pratique, se passer de considérer des tables de mortalité. Nous commencerons donc par offrir quelques observations à propos de ces tables. En l'espèce, les observations statistiques ont pour but principal le calcul d'un quotient de mortalité:

$$q_x = \frac{\delta_x}{\lambda_x}$$

pour chaque âge x; le symbole δ_x représente le nombre des décès survenus parmi les individus du groupe λ_x dans le courant de l'année qui suit l'époque où ces individus ont atteint l'âge x. Dans le cas d'une population totale, il suffit, pour obtenir le quotient demandé, de combiner les résultats fournis par un recensement avec les décès inscrits dans les registres de l'état civil, et pendant l'année qui précède, et pendant l'année qui suit, l'époque de ce recensement; le plus souvent la période d'observation a une durée plus longue, une dizaine d'années par exemple, et se limite par les dates de deux recensements. Ce dernier cas offre l'avantage d'une base plus large et, en outre, celui d'une élimination très satisfaisante de l'influence nuisible venant des erreurs dont le matériel recueilli est entaché.

Lorsqu'on range, pour chacun des groupes successivement envisagés, les quotients obtenus:

$$q_x = \frac{\delta_x}{\lambda_x}$$

suivant les valeurs croissantes de x, les séries formées de cette manière nous renseignent sur l'intensité de la mortalité de ces différents groupes. Quoique les tables ainsi obtenues ne constituent, à proprement parler, qu'un monument historique, il n'y a pas d'inconvénient à considérer leurs données comme encore valables pour une période future, plus ou moins longue et suivant d'assez près celle qui a servi aux observations; puisque les variations symptomatiques de la mortalité demeurent, malgré tout, d'une petitesse suffisante. Il faut naturellement comprendre ce qui précède uniquement dans ce sens que des groupes étendus donneront des nombres de décès proportionnels à ceux relevés par la statistique au cours d'une période passée pas trop éloignée.

Une restriction du même genre s'applique aussi aux quotients de mortalité que plusieurs Compagnies d'assurances sur la vie déduisent de leur clientèle. Une statistique basée sur les assurés d'une Compagnie doit s'étendre d'ordinaire sur une longue période, et ceci diminue nécessairement la confiance dans la proportionnalité dont nous venons de parler.

En partant d'un nombre arbitraire l_0 d'individus, tous d'âge zéro, nous obtenons en multipliant l_0 par p_0, puis le produit obtenu, soit l_1, par p_1, et ainsi de suite, une colonne dite colonne des survivants aux divers âges [1]. Une telle colonne traduit seulement l'image que l'on se forme de la mortalité qu'offrira, jusqu'à son extinction complète, le group l_0, lorsqu'on s'inspire de l'allure que l'observation du passé a mise à notre disposition. Que la confiance qu'une telle image mérite se rattache à diverses circonstances, c'est ce que nous examinerons d'une façon plus détaillée dans le chapitre suivant. Nous verrons alors aussi qu'une table des nombres des survivants aux divers âges ne doit en aucun cas être considérée comme représentant l'allure la plus probable de la mortalité du groupe l_0.

Nous nous rendons parfaitement compte du fait que notre point de vue à l'égard de la signification d'une table de mortalité ne possède guère l'attrait amené par un emploi conséquent des probabilités de vie et des probabilités de décès. Au lecteur qui parcourt les traités rattachant les mathématiques des assurances, et donc de même le problème de la mortalité humaine, au calcul des probabilités, il doit être difficile, ce nous semble, de se soustraire à l'impression que parmi les motifs poussant dans la voie indiquée, le désir d'arriver à un exposé d'une élégance ravissante figure au premier plan. Mais ce résultat s'obtient aux frais d'un rapprochement artificiel de deux disciplines au fond très différentes. Nous y voyons une raison de

[1]) Nous faisons remarquer que l'on a : $p_x = 1 - q_x$.

plus pour expulser désormais le calcul des probabilités des traités et des articles actuariels.

Quiconque accepte notre manière de voir, et juge par conséquent la statistique de la mortalité incompatible avec les conditions réclamées par le calcul des probabilités, pourra néanmoins nous poser la question: „Quel inconvénient y aurait-t-il à se servir, dans les recherches d'ordre théorique, et dans un but purement formel, des probabilités?" Nous répondons qu'il est certainement permis d'agir de la sorte, mais que nous croyons un tel procédé d'intérêt fort douteux. En ce qui concerne la statistique mathématique de la mortalité, il sera inutile d'insister et, pour ce qui en est des mathématiques des assurances, le contact de cette discipline avec les problèmes posés par la pratique, il ne peut que gagner en intimité, dès qu'on renonce à transporter les notions et les symboles du calcul des probabilités sur un domaine qui leur est, comme nous espérons l'avoir démontré, en dernière analyse tout à fait étranger. Nous nous proposons de traduire notre point de vue en quelques conclusions. Il ne sera pas inutile de tracer préalablement les lignes qui méritent, d'après nous, d'être suivies dans un exposé de la théorie mathématique des assurances sur la vie.

CHAPITRE V.

Les mathématiques élémentaires des assurances sur la vie.

La théorie mathématique des assurances sur la vie se propose en premier lieu de déterminer la valeur actuelle de sommes dont l'exigibilité est liée à certaines conditions de vie ou de décès. Les calculs relatifs à une pareille détermination doivent se fonder nécessairement sur deux bases fondamentales, à savoir: le taux d'intérêt et la mortalité; les mathématiques des assurances font donc emploi du calcul de l'intérêt et de la statistique de la mortalité.

Il y a lieu de faire remarquer tout de suite que chacune de ces deux bases réclame une supposition. Quant à l'intérêt qu'il sera possible de tirer de ses placements, on ne peut s'en rendre un compte exact, dès qu'on envisage une durée un peu longue. Les enseignements qui se dégagent du passé ont montré toutefois que les variations du taux de l'intérêt sont généralement faibles au cours d'une période de stabilité économique. C'est en invoquant ce fait qu'on motive l'hypothèse de la constance du taux, ce qui simplifie d'ailleurs de beaucoup formules et calculs. Il est évident que la prudence engage l'assureur à fixer le taux constant un peu inférieur au taux du moment, si la baisse du dernier doit être considérée comme imminente.

Des considérations analogues à celles qui précèdent s'appliquent à la mortalité. A priori on ne sait presque rien de ce que la mortalité des assurés sera dans l'avenir et, ici encore, une interrogation du passé s'impose. La meilleure manière de se renseigner dépend de plusieurs circonstances. Ce que la statistique met hors de doute, c'est que les variations de la mortalité sont, en général, d'ordre secondaire lorsqu'on limite l'investigation à des groupes très étendus. En conséquence, il est admissible d'introduire, également dans un but de simplification, une seconde hypothèse, savoir: la mortalité parmi les assurés se vérifiera comme constante. L'allure de cette mortalité sera déclaré d'avance identique à celle révélée par la statistique des faits passés.

Si les considérations qui précèdent se laissent accepter sans difficulté et s'appliquent, par leurs côtés essentiels, aussi bien à la mortalité qu'au taux de l'intérêt, il n'en va plus de même dès qu'on s'attache à confronter d'une manière plus approfondie la théorie avec la pratique. L'hypothèse relative à la mortalité se heurte alors immédiatement à une difficulté de nature à compromettre la réalisation d'un groupe étendu. Sans doute, la clientèle d'une Compagnie d'assurances sur la vie représente souvent un effectif important, mais ces institutions sont loin de se borner à une seule forme d'assurance et il y a lieu de partager la clientèle totale d'une Compagnie en groupes moins étendus dont chacun possède sa mortalité propre. A côté de cette difficulté, qui va à l'encontre d'une condition absolument nécessaire, la pratique a soulevé nombre de problèmes dont la solution demande que chaque assuré soit considéré à part.

On conçoit, par conséquent, qu'il importe de savoir comment il convient d'introduire pour chaque assuré un facteur de mortalité de manière que le total des assurés offre une mortalité qui s'accorde, autant que possible, avec celle déduite des matériaux statistiques mis à contribution.

A cet effet, on fait d'ordinaire appel au calcul des probabilités. Une Compagnie d'assurances sur la vie est alors jugée comparable à une maison de jeu; les assurés sont présentés comme traduisant le rôle des joueurs; chaque contrat est censé offrir aux parties en présence l'espérance mathématique d'un gain, espérance dépendant des probabilités de vie de l'assuré, c'est à dire du joueur qui met de l'argent contre la banque. La Compagnie, assimilée au banquier, encaisse les mises, formées soit par des primes uniques, soit par des primes échelonnées. La recherche des conséquences impliquées dans la parallèle que nous venons de reproduire, mérite certainement qu'on s'y arrête. Ces conséquences sont très intéressantes et le but que nous poursuivons réclame d'ailleurs leur mise en lumière.

Soit un individu d'âge x qui désire recevoir au bout de n années l'unité monétaire, à condition bien entendu qu'il soit vivant à cette époque. Supposons qu'au moment de conclure il s'acquitte de ses obligations au moyen d'une prime unique. Son espérance mathématique n'est autre chose que ${}_np_x$, probabilité qu'un individu d'âge x offre d'atteindre l'âge $x + n$. Sa valeur actuelle est:

$$A_{\overline{n|}}\ {}_np_x$$

La prime unique $A_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}}$ équivaut à l'espérance mathématique de la Compagnie, puisqu'il y a certitude que la dernière touche cette prime. Pour que la partie soit équitable, il faut que:

$$A_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}} = A_{\overline{n|}}\;{}_np_x$$

Passons maintenant au cas d'une assurance à primes annuelles et s'étendant sur la durée entière du contrat. A l'égard de la Compagnie, nous pouvons noter les valeurs probables:

$$P_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}}\;{}_0p_x,\; P_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}}\;{}_1p_x,\; P_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}}\;{}_2p_x \ldots P_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}}\;{}_{n-1}p_x$$

et l'espérance mathématique sera pour elle au moment de conclure:

$$P_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}} \sum_{k=0}^{n-1} A_{\overline{k|}}\;{}_kp_x$$

En rapprochant les espérances mathématiques des deux parties, on voit que la mise annuelle de l'assuré doit être fixée à:

$$P_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}} = A_{\overline{n|}}\;{}_np_x : \sum_{k=0}^{n-1} A_{\overline{k|}}\;{}_kp_x$$

C'est seulement à l'expiration du contrat que tout aléa aura disparu et ceci met la Compagnie dans la nécessité de tenir les primes reçues en réserve jusqu'en fin de contrat. Soit ${}_mV_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}}$ la réserve après m années. L'espérance mathématique de la Compagnie possède alors une valeur actuelle égale à:

$$P_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}} \sum_{k=0}^{n-m-1} A_{\overline{k|}}\;{}_kp_{x+m}$$

de sorte que la réserve correspondante se trouve déterminée par l'équation:

$${}_mV_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}} + P_{\stackrel{1}{x\,\overline{n|}}} \sum_{k=0}^{n-m-1} A_{\overline{k|}}\;{}_kp_{x+m} = A_{\overline{n-m|}}\;{}_{n-m}p_{x+m}$$

La règle fort simple suivant laquelle un jeu de hasard doit offrir aux deux parties même espérance mathématique, procure un moyen élégant de mettre en équation n'importe quel contract d'assurance sur la vie. C'est ainsi que le théorème des probabilités composées nous offre un secours précieux pour les cas comprenant plusieurs têtes.

On conçoit aisément que cette manière purement formelle de développer la théorie ne touche nullement la question qui demande si les probabilités ${}_np_x$ possèdent quelque signification concrète. Tout revient alors à présenter l'existence objective de ces probabilités comme un postulat. Or personne ne contestera que les mathématiques des assurances sur la vie tirent leur origine de la pratique et doivent conséquemment y chercher toujours leur point de départ. On s'efforcera donc d'emprunter les probabilités de vie et de décès à la statistique. Si de bonnes raisons rendent acceptable la supposition que les probabilités obtenues s'appliquent à des assurés, on peut presque compter, au moins dans le cas d'une portefeuille très développée, voir la mortalité parmi les assurés répondre effectivement à l'attente suscitée par la statistique.

Du fait que les quotients de mortalité se déduisent des observations statistiques, s'obtiennent par voie empirique, il résulte qu'une théorie actuarielle reposant essentiellement sur le principe de la théorie des maisons de jeu devra prendre son point de départ dans le calcul des probabilités à postériori. Si l'observation directe a donné que sur λ_x individus d'âge x, δ_x ont été frappés de décès dans l'année, on peut bien faire servir le rapport:

$$\frac{\delta_x}{\lambda_x}$$

c'est à dire la probabilité de décès annuel conforme à l'hypothèse la plus probable, de base aux mathématiques des assurances, mais, du point de vue de la théorie, il serait préférable de faire entrer en ligne de compte toutes les hypothèses possibles et de déduire ensuite de leur ensemble une probabilité de décès à postériori. Pareil procédé offre cependant bien des inconvénients, comme il ressort d'une publication de MOUNIER à ce sujet [1]). Voilà pourquoi le rapport $\frac{\delta_x}{\lambda_x}$ est universellement interprété comme probabilité de

---

[1]) G. J. D. Mounier: *Iets over de waarschijnlijkheid à posteriori in verband met premieberekening.* Archief voor de Verzekeringswetenschap; tome V (1901), p. 327—371.

décès sans rien de plus. Nous partageons cette interprétation simple, mais nous tenons à souligner que le matériel fourni par l'observation n'est pas toujours suffisamment étendu pour la motiver.

Quand on compare une Compagnie d'assurances sur la vie à une maison de jeu, on voit bientôt surgir une difficulté de nature particulière. Afin de la mettre en évidence, nous nous adressons de nouveau à l'assurance d'un capital différé. Nous avons déjà vu que la prime unique d'une semblable assurance s'exprime, dans le cas d'un capital assuré 1, par:

$$A_{\underset{x\,\overline{n|}}{1}} = A_{\overline{n|}}\,{}_np_x$$

Prenons maintenant un groupe nombreux d'individus, d'âge x, et concluant tous l'assurance en question. La Compagnie encaisse, dans le cas de s assurés, une somme égale à $sA_{\underset{x\,\overline{n|}}{1}}$, et sortira de l'épreuve sans gain ni perte, si le nombre des individus en vie à l'expiration de l'assurance est exactement $s\,{}_np_x$.

La probabilité que cette éventualité se réalise vaut pratiquement zéro; il y a même probabilité, savoir $\frac{1}{2}$, pour que le nombre des assurés en vie à l'époque d'expiration du contrat soit supérieur, respectivement inférieur, à $s\,{}_np_x$. Ceci revient à affirmer au moment de contracter que l'on peut parier 1 contre 1 que la Compagnie sera en gain ou en perte.

Il est facile de se convaincre que ce résultat reste toujours valable tant que la Compagnie se livre avec ses assurés à un jeu équitable. Si l'on se demande comment le jeu finira, il faut répondre que la ruine de la Compagnie en sera l'aboutissement. En effet, la théorie de la ruine des joueurs nous apprend que dans un jeu équitable le moins riche des deux adversaires sera finalement ruiné et il est évident que le capital de la Compagnie deviendra de plus en plus négligeable devant celui de l'ensemble croissant des joueurs [1]).

Il va de soi que la réalisation d'une si fâcheuse éventualité doit être évitée. Le seul moyen d'y parer consiste à rendre l'espérance mathématique de l'assureur supérieure à celle des assurés. On peut atteindre ce but en augmentant les primes pures d'un chargement afin de créer un fonds de garantie destiné à combattre l'influence

---

[1]) Cf. J. Bertrand: *Calcul des probabilités*; l.c. p. 116—118.

des écarts défavorables. La méthode usuelle d'augmenter l'espérance mathématique de la Compagnie consiste cependant dans l'emploi de probabilités de décès qui diffèrent de la réalité de manière telle que l'assureur se trouve favorisé. Rien ne s'oppose d'ailleurs à un emploi simultané des deux procédés; et dans la pratique il arrive effectivement qu'on les applique à la fois.

Du point de vue de la théorie des probabilités, le premier des deux moyens de défense mérite d'être préféré, parce qu'on tient alors manifestement compte des conditions réclamées par un jeu équitable. Les chargements destinés à constituer un fonds de garantie sont censés se justifier dans ce cas par cette circonstance qu'une mesure propre à garantir la Compagnie de la ruine sert en même temps de sauvegarde aux intérêts des assurés. Dans notre introduction, nous avons qualifié de dogmatiques ceux qui soutiennent d'une manière inébranlable que la théorie actuarielle trouve ses racines dans le calcul des probabilités et, d'après ce qui précède, on ne s'étonnera pas du fait que les dogmatiques ont maintefois préconisé une théorie actuarielle basée sur la notion de jeu équitable et cherchant la stabilité des Compagnies d'assurances sur la vie dans la création d'une réserve de risque dont la valeur doit se fixer à la suite d'un calcul [1]).

Malgré les instances des dogmatiques, les Compagnies ne recourent pas, pour déterminer leurs fonds de garantie, à la théorie de la réserve de risque. Cette théorie est d'ailleurs très compliquée et loin de son développement complet. S'il existe peut-être quelques rares assureurs qui désirent la mettre à contribution, ils doivent se résigner forcément à une évaluation grossière de leur réserve de risque. La règle généralement suivie pour se mettre à l'abri des déconvenues consiste à employer expressément des probabilités de décès conduisant à des primes pures plus élevées que celles exigées par la théorie du jeu équitable. Délaisser le principe qui demande que l'assureur et l'assuré aient même espérance mathématique, revient, dans le langage de la théorie du jeu, à fausser les conditions du jeu.

Si la dernière expression sonne mal à l'oreille des joueurs, elle

---

[1]) Cf. par exemple F. Boehm: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungsmathematik.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung; 44 Band (1934), 1—4 Heft, p. 13—20.

ne jette aucun blâme sur les Compagnies d'assurances sur la vie, qui faussent le jeu uniquement dans le but mêritoire, nécessaire même, d'éviter des déceptions à leurs assurés, qui seraient à la longue certainement frustrés dans le cas d'un assureur „trop probe pour fausser le jeu". On voit par conséquent que la comparaison d'une Compagnie d'assurances sur la vie à une maison de jeu se réflète même dans des interprétations diamétralement opposées d'un même terme.

Nous allons exposer maintenant le principe de la „fingierte Gesellschaft" — appelé en français le principe de la société élémentaire —, qui nous sera utile pour passer à la description de la méthode à laquelle nous croyons devoir lier les mathématiques des assurances. Presque tous les traités emploient ce principe, mais souvent sans dire sous nom. Comme nous l'avons déjà dit dans notre historique, certains auteurs ont introduit la notion de „fingierte Gesellschaft" dans l'intention de résoudre les problèmes actuariels sans faire intervenir le calcul des probabilités. Si le principe en question se rencontre cependant aussi chez les nombreux auteurs qui ne veulent point renoncer, en matière d'assurances, à l'emploi du calcul des probabilités, c'est qu'ils lui reconnaissent des avantages de nature didactique. Jusqu'à nouvel ordre, nous examinerons la théorie de la „fingierte Gesellschaft" du point de vue occupé par ces auteurs-là.

On part de deux conventions:

1. Au début d'un contrat quelconque, le nombre des assurés, tous d'âge x, est égal au nombre l_x que la table de mortalité donne pour les survivants d'âge x.
2. La société élémentaire formée par les l_x assurés s'éteindra d'une manière absolument conforme à l'allure de mortalité indiquée par la table choisie [1]).

Cela étant, demandons-nous la prime unique d'un capital différé,

[1]) Il est à remarquer qu'Euler, dont l'esprit fécond s'est occupé aussi des questions actuarielles, à déjà fait usage de ces hypothèses. Le lecteur est prié de consulter: *Leonhardi Euleri opera omnia*, publiés sous les auspices de la Société suisse des sciences naturelles. Tome VII: *Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes* (Leipzig et Berlin, 1923); nos. 334, 335, 403, 473 et 599.

comportant un montant 1, une durée de n ans, et un assuré d'âge x. Afin de résoudre le problème proposé, nous partons d'une société élémentaire dont chacun des l_x individus composants compte x ans. Le nombre des sociétaires encore en vie à l'époque d'expiration du contrat sera l_{x+n}. L'assureur aura donc à verser, à ce moment -là, un montant total de l_{x+n} et, comme cette somme vaut à l'époque de la naissance des contrats $A_{\overline{n}|}\, l_{x+n}$, il faut que chaque sociétaire paye pour son assurance une prime unique:

$$A_{\overset{1}{x}\overline{n}|} = \frac{A_{\overline{n}|}\, l_{x+n}}{l_x}$$

Nous faisons remarquer que la méthode employée se prête à n'importe quelle assurance ou, autrement dit, nous met à même d'échafauder, sans recourir le moins du monde à la notion de probabilité, une théorie complète dont les parties offrent une cohésion parfaite. La possibilité de parvenir à pareil résultat est démontrée notamment dans le traité bien connu de ZILLMER [1]). En général cependant, le principe de la „fingierte Gesellschaft" est mis à profit uniquement pour illustrer l'introduction des symboles de commutation, grandeurs déduites directement des éléments d'une table des vivants et destinées à mettre les formules sous une forme telle que les calculateurs voient, par suite de valeurs à calculer une fois pour toutes, leur tâche réduite au strict minimum. Pas besoin de dire que renoncer aux symboles de commutation serait le comble des sottises. On voit par conséquent qu'établir une suite de formules à l'aide du principe de l'espérance mathématique ne dispense point d'exprimer les probabilités relatives à la durée de la vie humaine dans les éléments d'une table des survivants, parties intégrantes de symboles jugés absolument indispensables. Or, c'est précisément cet ordre d'idées qui nous engage à supprimer dès le début la notion de probabilité, qui constitue un chaînon impossible à maintenir, tel quel, dans un exposé devant embrasser nécessairement un symbolisme dont les praticiens tirent incessamment le plus grand profit.

Quoique l'utilité offerte par la „fingierte Gesellschaft" ne soit guère contestée, il n'est pas moins vrai que les actuaires dogmatiques

---

[1]) A. Zillmer: *Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Renten-Versicherungen* (Berlin, 1861 erste, 1887 zweite Auflage).

signalent expressément qu'une analyse exacte des choses fait résider le motif véritable de cette méthode dans le calcul des probabilités [1]).

Il nous est impossible de partager pareil point de vue. Loin de là! Nous allons même jusqu'à demander s'il est vraiment admissible de faire entrer le principe de la „fingierte Gesellschaft" dans une théorie actuarielle assise sur le calcul des probabilités.

Si nous ne nous trompons pas, c'est sur une conception erronée de la signification d'une table de survivants que reposent nombre de malentendus. Il importe beaucoup de souligner que des observations sur la mortalité découlent seulement des fréquences relatives. En regardant ces fréquences comme des probabilités de décès, leurs compléments à l'unité peuvent servir à la construction d'une table de survivants, mais il est clair qu'une telle table ne diffère pas essentiellement de la suite des probabilités dont elle est tirée; les partisans du point de vue dogmatique peuvent dire, tout au plus, que le nombre l_{x+1}, écrit dans la table en regard de l'âge $x + 1$, représente la valeur la plus probable du nombre des individus qui, sur l_x personnes d'âge x, survivront à l'âge $x + 1$; la probabilité dont il s'agit est toutefois petite et cela d'autant plus que le groupe primitif est plus nombreux. En vue de pouvoir chiffrer avec précision, il est nécessaire de s'adresser à une table de survivants dont les éléments sont de grands nombres; toutefois, ce serait se méprendre étrangement sur la signification exacte d'une table de survivants que d'y voir une image fidèle de l'extinction progressive d'un grand nombre de nouveaux-nés [2]); les nombres qu'une table de survivants fait correspondre aux différents âges sont sujets à caution et si l'allure de la mortalité réelle ne s'écarte pas trop de celle indiquée par la table, il y a lieu de faire grand cas du pouvoir compensateur montré par le hasard.

En raison des considérations qui précèdent, nous croyons qu'il ne convient pas de maintenir, en matière actuarielle, le calcul des probabilités et de réserver en même temps une place à la „fingierte Gesellschaft". N'est-elle pas absurde, la supposition qui affirme que l'allure de mortalité la plus probable sera effectivement réalisée dans

---

[1]) Cf. par exemple P. Radtke: *Die Stabilität der Lebensversicherungs-Anstalten.* Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft; III Band (1903), p. 400.

[2]) Cette conception étrange se trouve par exemple dans l'ouvrage de L. Maingie et de H. Maurice: *Les opérations viagères* (Namur, 1932); p. 21.

le cas d'un groupe nombreux d'assurés? Qui s'occupe du calcul des probabilités, doit d'ailleurs, comme nous l'avons exposé en détail dans le troisième chapitre, se rappeler toujours que son objet d'étude laisse précisément sans réponse la question qui demande ce que l'avenir fera réalité. Il est vrai, nous l'avouons, que les théorèmes qui touchent le fin fond du calcul des probabilités offrent certains avantages, en tant qu'ils déclarent peu important le risque auquel on s'expose en identifiant, dans le cas d'une longue série d'épreuves, fréquence relative et probabilité; mais, il est impossible de faire figurer des théorèmes de cette espèce dans une théorie élémentaire de la mathématique des assurances. Certes, nous comprenons fort bien qu'une Compagnie d'assurances sur la vie désire connaître avec certitude la mortalité future de sa clientèle. Eh bien, devant l'évidence que des réponses où figure le terme de probabilité ne sauraient satisfaire ce besoin de certitude, il n'y a pas lieu de s'étonner de ce qu'on ait fait appel au principe de la „fingierte Gesellschaft", notion expulsive du calcul des probabilités, certes, mais combien évocatrice de l'idée d'association, pivot même de l'industrie des assurances!

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la dispersion à peu prez normale, qui caractérise d'ordinaire les observations relatives à la mortalité, n'implique nullement le schéma de BERNOULLI; au contraire, la mortalité humaine nous est apparue comme un exemple d'un phénomène statistique réductible à une combinaison du schéma de LEXIS et de celui de POISSON. Il en résulte qu'il faut voir dans les fréquences relatives q_x, des valeurs approchées de probabilités qui se rapportent, comme il est évident, uniquement au matériel sur lequel ont porté les observations.

Plaçons-nous dans le cas où les primes et les réserves mathématiques s'appuient sur une table de mortalité idéale, c'est à dire sur une table déduite d'une population totale, ou partielle, dont la mortalité s'accorde avec celle parmi les assurés. Sans doute, par suite des variations continuelles des fréquences de la mortalité, l'accord ne sera jamais parfait; mais ceci n'est pas d'un intérêt prédominant. L'assurance obligatoire constitue d'ailleurs un cas d'où la possibilité d'appliquer la théorie à des bases exactes n'est pas exclue.

Dans l'hypothèse d'une table de mortalité idéale, il est permis, en faisant les réserves nécessaires, d'interpréter les grandeurs q_x comme des probabilités. Les restrictions dont il faut tenir compte concernent quelques théorèmes du calcul des probabilités, plus spécialement ceux appartenant à la théorie des écarts, qui n'est pas, au moins sous sa plus simple forme, applicable à des probabilités moyennes. Comme des questions de cette nature ne doivent pas trouver place dans une théorie mathématique élémentaire des assurances, nous ne nous y arrêterons pas. Or, c'est précisément ce que nous venons de dire dans les lignes précédentes qui suggère la question: la notion de probabilité offre-t-elle vraiment quelque avantage pour le calcul des primes et des réserves mathématiques? Notre réponse ne peut être qu'au plus haut point défavorable.

Il importe de ne pas oublier qu'une théorie mathématique élémentaire des assurances trouvant son appui dans le calcul des probabilités, part du principe de l'espérance mathématique, qui permet la mise en formules de tous les problèmes rencontrés dans la pratique. Avec chaque assuré, la Compagnie engage un jeu équitable; mais ceci ne veut pas dire que la participation à un tel jeu se laisse motiver indépendamment des circonstances. En effet, dans le troisième chapitre, nous avons insisté sur le caractère abstrait des règles que le calcul des probabilités donne pour gouverne et, de plus, nous avons souligné que cette discipline n'offre guère de secours à ceux qui se décident à participer à quelque jeu de hasard. Si nous avons accordé alors une signification concrète à l'espérance mathématique, bien entendu dans le cas d'une longue série d'épreuves, il faut bien comprendre que le sens de nos paroles revient simplement à affirmer qu'on s'expose à un risque léger, lorsqu'on convient de prendre la probabilité abstraite d'un événement comme valeur de sa fréquence relative future.

Or, en matière d'assurances sur la vie, la pratique s'accommode mal d'éléments spéculatifs empruntés à une théorie éminemment abstraite. Si les joueurs sont libres de braver le danger qui consiste à tabler sur la conduite du hasard, il n'en va pas de même d'une Compagnie d'assurances, qui doit chercher avant tout les moyens propres à garantir, autant que possible, la stabilité de l'entreprise. Invoquer sous ce rapport l'importance extrême de la loi des grands nombres, c'est tenir insuffisamment compte du fait que, même dans le cas des plus grandes Compagnies, le nombre de ceux qui ont contracté dans des conditions identiques est toujours relativement petit. Ce qu'on peut soutenir tout au plus, c'est que les assurés qui appartiennent à une même catégorie, présenteront une mortalité réelle assez bien en harmonie avec la mortalité prévue.

Voici un autre inconvénient. Une théorie des assurances sur la vie fondée sur le calcul des probabilités, peut-elle être vraiment élémentaire? Notre réponse est nettement négative. En effet, la déduction des formules pour les primes et les réserves mathématiques, suggère l'idée que la mortalité des assurés s'avérera conforme à la mortalité la plus probable; mais, la probabilité pour qu'il en soit ainsi, s'évalue, dans le cas de groupes pas trop petits, comme peu supérieure à zéro. Un commençant, capable de juger par luimême, doit recevoir une bien singulière impression des Compagnies d'assurances, qui osent se confier à une boussole aussi capricieuse. Sans doute, on peut tenter d'éviter l'écueil en disant que les avantages et les désavantages se compensent en moyenne; mais, il nous semble difficile de sentir de l'admiration pour une théorie qui doit recourir à un vague de cette sorte pour s'attribuer le cachet de la perfection. Nous sommes donc amenés à la conclusion: le calcul des probabilités peut servir à construire d'une manière tout à fait formelle les mathématiques des assurances; mais son secours est des plus douteux dès qu'il s'agit de parvenir à une vue claire du mécanisme des institutions d'assurances.

Nous voyons par conséquent que l'application de la méthode classique prête déjà à la critique lorsqu'on se place dans l'hypothèse d'une table de mortalité idéale. Il est évident que renoncer à cette hypothèse revient à rendre la critique encore plus aisée. Or, les Compagnies agissent consciemment de manière à supprimer l'emploi d'une table idéale. En effet, plusieurs raisons les décident à se servir de tables accusant une mortalité qui diffère de la mortalité réelle dans un sens à l'avantage des entreprises. Tout d'abord, les Compagnies doivent nécessairement combler un déficit éventuel au moyen de leurs propres ressources et c'est ainsi qu'elles feront bien de s'adresser à des tables leur laissant une marge de sécurité. Ajoutons que choisir les tables à leur avantage se motive encore par le fait qu'une Compagnie d'assurances sur la vie, comme tout autre entreprise commerciale, poursuit un but lucratif.

Enfin, il faut citer sous ce rapport surtout la sélection. Lorsqu'il s'agit d'un contrat où le risque de mort prédomine, les Compagnies font subir un examen médical à l'assuré; de nos jours l'usage de remplacer la visite médicale par l'obligation de remplir une feuille, posant des questions relatives à la santé de l'assuré, se répand de plus en plus; ce qui est essentiel, c'est que les Compagnies parviennent à établir une sélection de manière que leurs assurés présentent, au moins pendant une certaine période — mettons pendant les dix premières années de l'assurance —, une mortalité inférieure à celle indiquée par les tables employées habituellement pour calculer les primes et les réserves mathématiques. Une mortalité restant de 25 % ou de 30 % au-dessous de celle fournie par les tables n'est pas exceptionnelle. Il est vrai que les tables dites de sélection, sont particulièrement propres à rendre efficaces des tentatives en vue d'une meilleure adaptation; mais il est facile de comprendre que les Compagnies entendent profiter elles-mêmes des avantages qui résultent de l'examen médical.

L'auto-sélection, dont on sait le rôle important à l'égard des assurances en cas de vie, force même en quelque sorte les Compagnies d'agir comme il vient d'être dit. C'est un fait bien connu que les assureurs éprouvent maintes fois de grandes difficultés à baser les rentes viagères sur des tables offrant une mortalité qui ne dépasse pas celle manifestée par les rentiers viagers. Des tables jugées à priori convenables amènent bien souvent de fortes déceptions. Aussi, dans la plupart des pays, les assurances en cas de vie sont rarement une source de bénéfices. Toutefois, il n'est pas sans intérêt de faire remarquer que l'expérience des derniers temps a montré une diminution de l'auto-sélection parmi les rentiers viagers. Ce phénomène doit être considéré comme une conséquence de la crise mondiale et disparaîtra sans doute au fur et à mesure que l'horizon économique deviendra moins trouble. Les Compagnies font donc bien de ne pas sacrifier l'avantage qui résulte de l'examen médical auquel les assurés en cas de décès doivent se soumettre. C'est pour elles un moyen de combattre les pertes que les assurances en cas de vie pourront occasionner.

On voit, par ce qui précède, que l'assurance facultative laisse d'ordinaire une marge étendue entre la mortalité supposée et la mortalité réelle. Notons qu'il n'est pas permis de parler à cet égard d'une base erronée, que l'assureur pourra sacrifier à mesure que son entreprise progresse. Bien au contraire! Les Compagnies doivent, absolument et conscientes du but, s'écarter des tables qui serrent de près la mortalité réelle. Nous reviendrons sur ce point. Pour le moment nous ne voulons que souligner combien il est bizarre de se cramponner, en dépit d'argumentations telles que nous venons de présenter, au point de vue qui voit dans les mathématiques des assurances une discipline indissolublement liée au calcul des probabilités. Les quotients dont on se sert dans le calcul des primes et des réserves mathématiques n'ont que l'apparence de probabilités; en réalité ils n'offrent pas la moindre parenté avec la notion de probabilité mathématique et c'est pour cela même qu'ils réclament un examen mettant en lumière leur véritable signification.

Il est encore d'autres reproches à adresser à la théorie classique. On applique par exemple le théorème des probabilités composées aux assurances comprenant plusieurs têtes, ce qui implique la supposition que les vies des différentes têtes soient indépendantes les unes des autres. Pareille hypothèse est bien souvent inadmissible, notamment dans le cas de deux époux et dans celui de proches parents. On peut dire, d'une manière générale, que les actuaires cherchent à simplifier le calcul des primes et des réserves mathématiques, même en renonçant plus ou moins aux exigences sévères que pose le calcul des probabilités.

De tout ce qui précède, il ressort que les liens unissant les mathématiques des assurances au calcul des probabilités sont trop faibles pour résister lorsqu'on passe de la théorie à la pratique. Nous allons essayer maintenant de pénétrer plus avant dans le notion d'assurance, afin de trouver à la théorie un point de départ plus satisfaisant.

L'idée d'assurance découle directement de la tendance naturelle de l'homme à éviter autant que possible les graves conséquences d'une maladie ou d'une mort prématurée. Il est clair que ce besoin de se mettre à l'abri de faits fâcheux a tout d'abord stimulé le goût de l'épargne individuelle, mais n'a donné lieu à l'assurance proprement dite qu'à partir du moment où plusieurs personnes se sont réunies en groupe, afin de couvrir ensemble des pertes trop lourdes à supporter par les adhérents qui les subissent. Nous voyons ainsi que l'idée d'assurance repose sur deux autres, dont l'une est de nature éthique et se rattache au penchant de l'homme à protéger la vie; tandis que l'autre revêt un caractère social par suite de la nécessité de pratiquer l'association afin de rendre les mesures de prévoyance efficaces.

Dans l'histoire de l'assurance sur la vie, il existe en effet des exemples d'associations dans lesquelles un certain nombre de personnes se sont groupées dans l'intention de pourvoir aux besoins engendrés par la maladie ou par la mort. Actuellement encore, il existe de semblables organisations d'assistance mutuelle; mais leur solvabilité ne mérite en général que peu de confiance, puisqu'elles allouent des indemnités se réglant sur les disponibilités du moment, de sorte que les sinistrés futurs sont exposés au danger de ne recevoir presque rien. Les entreprises constituées sous une forme plus perfectionnée ne se prêtent pas à l'inconvénient que nous venons de signaler; elles comptent un grand nombre d'adhérents et prennent soin de stipuler par contrat les droits et les engagements de chacun des associés ou assurés.

Au début du présent chapitre, nous avons déjà montré que le calcul des primes demande des suppositions concernant le taux de l'intérêt et la mortalité. Les hypothèses en question ne reposent point sur l'arbitraire, mais sur l'expérience d'une période fort longue. C'est en recourant aux matériaux, recueillis et travaillés par les statisticiens des pays civilisés, pendant plus d'un siècle déjà, que les Compagnies d'assurance peuvent se faire une idée raisonnable du taux de l'intérêt et de la mortalité.

Une question de première importance consiste à savoir à quel point les bases à choisir pour le calcul des primes et des réserves mathématiques doivent se conformer aux résultats fournis par la statistique. Il y a lieu de faire remarquer tout d'abord que la statistique se rapporte à une période passée et determinée, de sorte qu'une Compagnie d'assurances sur la vie, qui doit envisager l'avenir, ne saurait les adopter sans s'être livrée préalablement à un examen approfondi des facteurs qui peuvent influencer les phénomènes futurs.

Mais, indépendamment de la valeur relative de tout matériel statistique, il n'est pas permis de répondre à la question de tout à l'heure par la remarque que les bases de l'assurance sur la vie doivent refléter avec un grand degré d'exactitude l'état présent des choses. Sans doute, l'équité exige que les primes demandées aux assurés ne soient pas déraisonnables, mais l'intérêt des assurés demande également que la sécurité de l'entreprise soit scrupuleusement observée, et cette condition se trouve surtout favorisée par des bases choisies de manière à laisser une certaine latitude.

C'est dans cet ordre d'idées que nous tenons à rappeler, encore une fois, combien la comparaison à une maison de jeu est ici à rejeter.

L'écroulement d'une maison de jeu nous laisse froids; la ruine d'une Compagnie d'assurances sur la vie nous émeut violemment. C'est qu'une maison de jeu, qui ne fait pas acte de prévoyance et de solidarité, ne vaut rien au point de vue de la morale, tandis que l'assurance poursuit un but moral très élevé et représente un intérêt social du tout premier ordre. Une Compagnie d'assurances sur la vie doit, par suite, se préoccuper constamment de sa stabilité et ne pas compromettre celle-ci en choisissant des bases qui ne laissent aucune ou peu de marge.

Nous pouvons maintenant trouver sans peine le seul point de départ qui convienne à une théorie mathématique élémentaire des assurances. Nous avons signalé que les motifs qui incitent à conclure une assurance sont avant tout d'ordre moral, et nous avons mis en relief de même que l'assurance n'est possible que dans le cas de plusieurs personnes se réunissant en groupe. C'est sur cette collectivité des assurés, considérés dans leur ensemble, qu'il importe d'attirer l'attention des élèves. Dans l'enseignement, il faut éviter les exposés et les formules qui considèrent l'opération sur un cas isolé. Le symbole p_x, défini d'ordinaire comme la probabilité d'un individu d'âge x d'atteindre l'âge $x+1$, offre précisément le danger d'habituer le commençant à raisonner sur un cas isolé. Nous préférons l'emploi de l'expression $\frac{l_{x+1}}{l_x}$, puisqu'elle met sous les yeux du lecteur des symboles représentant des groupes d'individus et contribue par suite à familiariser l'élève avec l'idée d'un ensemble de personnes qui ont rendu leurs intérêts solidaires, c'est à dire avec l'idée qui constitue la clef de voûte de l'industrie des assurances.

S'il est nécessaire de considérer les assurés comme une collectivité et s'il importe, d'autre part, de choisir une table de survivants après avoir fait, au moyen du matériel statistique fourni par le passé, une hypothèse sur la mortalité future, le calculateur substituera tout naturellement aux symboles algébriques les nombres fournis par la table de mortalité et les tables déduites de celle-ci.

Il est évident qu'adopter ce point de vue, revient à reconnaître qu'il faut avoir recours au principe de la ,,fingierte Gesellschaft". C'est la seule façon de rendre pleinement justice au caractère collectif du mécanisme qui préside à l'industrie des assurances. Le principe en question offre, en outre, à l'assureur le moyen d'asseoir le calcul des primes et des réserves mathématiques sur des bases conformes aux exigences posées par l'équité et par la sécurité.

Le fait que nous jugeons le principe de la ,,fingierte Gesellschaft" propre à délivrer l'assurance sur la vie des expressions vicieuses et des considérations peu recommandables, introduites toutes par les partisans de l'application du calcul des prohabilités à la science de l'actuaire, nous oblige de chercher une réponse à cette question: Est-il réellement possible, l'état actuel de la mortalité guidant notre choix, d'emprunter les nombres des décès futurs à une base construite de manière telle que des écarts ne produisent point, au cours d'une période fixée d'avance, un effet fâcheux? Notre réponse à cette question est catégoriquement affirmative. Nous n'entendons pas dire par cela qu'à l'intérieur de chaque groupe la mortalité se montre toujours favorable à la Compagnie; ce qui suffit, c'est que pour l'ensemble de tous les assurés, la mortalité demeure inférieure à notre attente, en tous cas ne la dépasse que fort peu. Eh bien! C'est ici qu'il convient d'en rappeler à l'expérience, de faire remarquer qu'une période embrassant plus de cent ans peut être invoquée pour montrer que la grande majorité des Compagnies ont fait leurs preuves en ce qui concerne une gestion judicieuse, digne de confiance, exempte d'aventures.

Nous voyons ainsi que le choix de bases sûres permet d'arriver à la stabilité réclamée, point que nous tenons à souligner tout particulièrement. Sans doute, la stabilité doit être recherchée par n'importe quelle entreprise, mais surtout par les Compagnies d'assurances sur la vie, à cause de leur but éminemment sociale et éthique. Pour montrer clairement que c'est surtout par une gestion des plus solides qu'une Compagnie doit s'efforcer d'obtenir la confiance, il suffit de rappeler qu'au moment où l'assureur doit s'acquitter de ses engagements, l'assuré n'est souvent plus là pour voir si l'assureur s'en acquitte bien.

Il va de soi qu'en mettant la sécurité de l'entreprise sur le tapis, nous n'entendions pas produire chez nos lecteurs l'impression que ce point capital est négligé par les assureurs qui lient la théorie actuarielle au calcul des probabilités, et cherchent à déterminer aussi rigoureusement que possible les valeurs numériques des probabilités en jeu. Nous savons fort bien qu'ils prennent soin de majorer les primes pures, qu'ils se flattent d'avoir établies avec beaucoup de netteté. Mais il faut bien reconnaître que cette majoration n'a forcément rien de scientifique et qu'à cause de cela, leur méthode offre un caractère hybride. En effet, elle commence par exiger doctoralement une rectitude conforme aux principes abstraits du calcul des probabilités et finit par se contenter d'estimations auxquelles le qualificatif de scientifique ne s'applique d'aucune façon. Les partisans de la „fingierte Gesellschaft" se montrent plus conséquents. Ils n'oublient jamais, pas même au milieu des formules les plus compliquées, que l'actuaire poursuit un but essentiellement pratique, plus ou moins réfractaire à l'analyse scientifique rigoureuse. Ils opèrent constamment avec les symboles l_x, grandeurs nettement numériques, et jamais avec le symbole p_x, notion favorite de ceux qui aiment à théoriser.

Certes, dans la méthode de la „fingierte Gesellschaft" nous rencontrons des expressions comme $\frac{l_{x+n}}{l_x}$. Mais prenons garde! Elles n'y figurent point avec le caractère d'une probabilité. N'oublions pas que les apparences sont souvent trompeuses. Expliquons-nous en raisonnant sur l'assurance d'un capital différé. La théorie basée sur les probabilités conduit ici à l'expression:

$$ {}_n p_x \, A_{\overline{n|}} $$

comme prime unique. Pour en déduire les primes qui doivent figurer dans les barêmes, il est nécessaire de donner à ${}_n p_x$ une valeur numérique. Dans ce but la formule de toute à l'heure est remplacée par celle-ci:

$$ \frac{l_{x+n}}{l_x} \, A_{\overline{n|}} $$

c'est à dire par la formule même que la théorie de la „fingierte Gesellschaft" établit sans passer par la notion de probabilité. Ce qui est à retenir, c'est que la dernière méthode n'introduit pas l'expression $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ d'emblée, ni ouvertement, ni secrètement; tandis que l'autre la fait entrer, dès le début, comme élément constitutif de tous ses raisonnements, bien que le symbole ${}_np_x$ cache cette manière d'agir à la vue du lecteur, jusqu'au moment où il faut, nécessité inévitable dans n'importe quelle science de mathématiques appliquées, traduire les résultats trouvés en chiffres. La sincérité nous fait reconnaître d'autre part que le camouflage réussit à merveille, grâce aux raisonnements empruntés au calcul des probabilités. Dans la méthode de la „fingierte Gesellschaft" l'expression $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ n'apparaît que tout à la fin, comme résultat d'une opération d'algèbre élémentaire, à savoir: la transposition de l_x du premier membre au second membre d'une équation. Tout homme en possession des premiers éléments de l'arithmétique comprend que $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ indique simplement l'opération appelée division. Cela étant, on nous accordera aisément que ceux qui prétendent que la théorie défendue par nous utilise, d'une manière implicite, la notion de probabilité, se plaisent à chercher chicane. Nous espérons avoir montré que le reproche de camoufler les choses peut être adressé, à juste titre, aux partisans de l'autre méthode.

Puisque les expressions telle que $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ se rencontrent à tout bout de champ, il importe de leur choisir un nom collectif. Nous avons vu que le terme de probabilité serait ici tout à fait absurde. Nous pensons que celui de *facteurs de réduction* leur irait assez bien. En effet, la division par l_x sert à réduire le montant total à verser à la prime unique due par chaque tête de l'effectif dont on est parti.

Voici une remarque d'ordre général. Il suffit d'établir seulement les formules pour les assurances en cas de vie au moyen du calcul algébrique, car toutes les autres formules peuvent s'obtenir par pur raisonnement de celles-la. M. VAN HAAFTEN a examiné cette question avec tous les détails qu'elle comporte [1]). Nous renvoyons le lecteur désireux de l'étudier à fond aux publications de ce professeur. Il nous semble pourtant utile de dire un mot à propos de la manière dont il convient de faire usage de la „fingierte Gesellschaft" dans le cas de deux ou de plusieurs têtes. Soit une assurance portant sur deux têtes, l'une d'âge x, l'autre d'âge y. Il est bien entendu qu'elles appartiennent à des catégories de mortalité différente. Le procédé habituellement suivi consiste à combiner, deux à deux, et de toutes les manières possibles, les membres de deux groupes, l_x et l_y, et à représenter le produit $l_x l_y$, nombre des combinaisons obtenues, par l_{xy}. Nous jugeons pareille manière de procéder peu recommandable, parce que les combinaisons indiquées, au plus haut point artificielles, troublent la vraie nature du problème à coup sûr pour les commençants. Dans le cas de deux personnes de sexe différent, elle est même assez bizarre; les combinaisons font penser alors au travail qui s'effectue, non à l'actuariat d'une Compagnie d'assurances, mais dans le cabinet de la direction d'une agence matrimoniale. Il vaut mieux, selon nous, suivre de près le procédé utilisé dans le cas d'une seule tête. Pour cela, il convient d'introduire tout de suite le symbole l_{xy}, qui représentera, par définition, $l_x\, l_y$ couples constituées chacune par deux têtes dont la première est d'âge x et la seconde d'âge y. Suivant la table de mortalité, relative aux têtes x, sur l_x têtes d'âge x, l_{x+n} survivent après n années. Comme nous partons de l_{xy} têtes, le nombre des survivants sera:

$$l_{xy}\, \frac{l_{x+n}}{l_x} = l_x\, l_y\, \frac{l_{x+n}}{l_x} = l_y\, l_{x+n}$$

La question de savoir combien de têtes parmi ce nombre $l_y\, l_{x+n}$ n'auront pas perdu leur associé, revient à se demander combien de têtes seront encore en vie après n années sur $l_y\, l_{x+n}$ têtes actuellement d'âge y. La table de mortalité pour les y nous fournit la réponse:

$$l_y\, l_{x+n}\, \frac{l_{y+n}}{l_y} = l_{x+n}\, l_{y+n}$$

[1]) Cf. *Les différentes espèces de rentes viagères sur une ou deux têtes.* Het Verzekerings-Archief; année XIV (1933), p. (169)—(176). *Les diverses formes d'assurance d'un capital établies en partant des rentes viagères.* Id., année XV (1934), p. (58)—(73).

Si l'on demande le nombre des femmes qui deviendront veuves au cours de la $n^{\text{ième}}$ année et atteindront l'âge $y + n$, lorsqu'on part de l_{xy} couples, il est facile de déduire la réponse:

$$l_{x+n-1}\, l_{y+n-1} \frac{l_{y+n}}{l_{y+n-1}} - l_{x+n}\, l_{y+n}$$

ou:

$$l_{y+n}\,(l_{x+n-1} - l_{x+n})$$

Nous croyons inutile de multiplier les exemples. Ce qui précède fait voir que les solutions s'obtiennent sans peine.

Nous espérons que les considérations données au cours du chapitre présent ont montré clairement les vertus du principe de la „fingierte Gesellschaft". Il se supporte fort bien avec la liberté qu'il faut laisser à l'assureur de choisir des bases appropriées à la nature de son industrie, et c'est à cause de cela que ce principe constitue le moyen tout indiqué pour échafauder une théorie mathématique élémentaire des assurances.

Qu'on n'objecte pas que les circonstances se montrent souvent peu en harmonie avec le principe en question. Nous ne nions pas qu'il soit facile de citer des contrats de nature particulière, de même que certaines questions d'ordre spécial, qui sont loin de nous mettre en présence de groupes très nombreux. Mais il serait injuste de faire valoir ceci contre le principe de la „fingierte Gesellschaft", car une méthode ne saurait être condamnée du fait qu'elle demeure inopérante dans le cas d'un objet ne répondant pas à l'hypothèse dont elle part. A ce point de vue la méthode de la „fingierte Gesellschaft" offre même une supériorité éclatante sur celle basée sur les probabilités. Elle se revêt d'elle-même d'une cuirasse qui la protège contre les applications inadmissibles. Cette enveloppe protectrice n'est autre chose que son symbolisme. En effet, les symboles des vivants, nous le répétons, attirent constamment l'attention sur ce fait que l'assurance sur la vie présuppose un très grand nombre d'individus contractant dans des conditions identiques.

Nous voyons par conséquent que la science actuarielle se trouve fort bien d'être séparée d'avec le calcul des probabilités; pareille séparation favorise une vue claire de la nature essentielle de l'industrie des assurances et fait mieux comprendre sa signification sociale. Quant au calcul des probabilités, il nous semble difficile que les penseurs qui s'adonnent à cette branche des mathématiques se montrent mécontents de la voir déblayée d'éléments qui lui sont substantiellement étrangers.

CHAPITRE VI.

PROBLÈMES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Il est suffisamment connu que différents problèmes actuariels, bien qu'ils fassent l'objet d'un examen théorique des plus minutieux, n'en trouvent pas moins que peu d'application dans la pratique de l'industrie des assurances sur la vie. A cette catégorie appartiennent notamment le problème de l'ajustement analytique des tables de mortalité et celui de la théorie du risque. Les autres problèmes qui peuvent être cités sous ce rapport, comme la mise à contribution des équations intégrales et d'autres ressources empruntées à l'analyse infinitésimale, seront exclus des considérations qui vont suivre. Nous nous bornerons donc aux deux premières des questions indiquées. L'ajustement des tables de mortalité et la théorie du risque constituent des problèmes dont la solution est poursuivie de préférence en recourant à la théorie des probabilités, et c'est précisément cette circonstance qui nous engage à examiner ces deux problèmes à la lumière des considérations présentées dans les chapitres précédents.

S'il est vrai que les théories mathématiques relatives à l'ajustement analytique des tables de mortalité et à la détermination du risque, sont restées presque sans écho [1]), du moins dans le monde des praticiens, il serait d'autre part injuste de considérer tout le travail consacré à leur développement comme peine perdue. Il faut se garder surtout d'aller jusqu'à déclarer inexact le point de vue des actuaires qui se sont efforcés d'arriver en cette matière à une solution. En effet, le jugement porté sur une méthode scientifique doit rester étranger à des considérations d'utilité pratique; exiger que l'actuaire se confine dans la recherche de résultats se laissant traduire en progrès pratiques, ce serait en quelque sorte faire violence au déploiement de ses goûts et de ses capacités scientifiques. En ce qui concerne plus particulièrement les deux problèmes dont il va être question dans la suite, on peut affirmer à coup sûr que la profondeur des recherches

[1]) Voyez les premières lignes de la page 94.

théoriques qu'ils ont provoquées, ont fortement contribué à élargir notablement nos vues sur les questions touchant le calcul des probabilités.

Si peu d'assureurs utilisent des tables de mortalité ajustées analytiquement, que des réserves de risque calculées mathématiquement se rencontrent rarement, il faut y voir une conséquence du fait que les Compagnies font beaucoup de cas d'une technique commerciale très efficace, alors même que les conditions réclamées par une telle technique rendent nécessaire le sacrifice de la précision théorique.

L'essor gigantesque de l'industrie des assurances sur la vie a fortement contribué à restreindre les préoccupations d'ordre scientifique qui distinguaient jadis la gestion des Compagnies de celle d'autres institutions financières. Actuellement, on préfère des bases sûres, déterminées sans souci des règles posées par la théorie; de *même la réserve de risque est fixée aussi largement que possible.* Il est vraisemblable que cette manière d'agir ne sera pas abandonnée dans l'avenir, que les Compagnies n'éprouveront nullement le besoin d'un retour aux résultats d'une analyse mathématique exacte, pas même dans le cas où ces résultats seront peut-être utilisables. C'est pourtant sans hésitation que nous avons réservé une place à ces sujets de valeur plutôt académique; ils se prêtent bien à servir de clôture à notre étude sur les liens entre le calcul des probabilités et la mathématique des assurances; il faut d'ailleurs reconnaître aussi que l'intérêt provoqué par leur examen théorique dépasse de beaucoup celui qu'ils rencontrent en général dans le monde des actuaires.

Il est évident que nous n'avons pas du tout l'intention de passer en revue toutes les méthodes préconisées pour l'ajustement des tables de mortalité, ni celles recommandées pour l'évaluation du risque. A notre avis ces problèmes sont généralement envisagés d'un point de vue erroné, et nous croyons que les solutions présentées ne méritent pas la confiance que plusieurs chercheurs leur attribuent. Ainsi nous estimons qu'il convient de soumettre les problèmes en question à une considération générale et nous aurons soin de nous placer quant à la notion de probabilité de décès, qui s'y trouve intimement liée, au point de vue que nous avons commenté en détail aux chapitres précédents.

Les observations concernant la mortalité offrent toujours cet inconvénient que les fréquences relatives tirées d'elles montrent une allure irrégulière, en ce sens qu'il est impossible de réunir, lorsqu'on passe à une représentation graphique, les sommets des ordonnées par une courbe d'aspect simple. Or, les variations brusques ne répondent guère à l'idée que l'on se fait à priori de la nature d'une fonction biologique; on présume une telle fonction plutôt absente d'anomalies.

Les fluctuations constatées dans une série expérimentale de fréquences de décès peuvent être attribuées à toutes sortes de causes, dont la plupart résident dans le matériel qui a servi à la formation de cette série. Dans la statistique démographique, l'on se heurte toujours à l'inconvénient de renseignements inexactes; sous ce rapport les dates des naissances, les nombres des décédés, et d'autres données du même genre, sont surtout à signaler.

*Il convient d'attirer également l'attention sur l'émigration et l'im*migration, phénomènes sur lesquels il est toujours difficile de se procurer des documents exacts, de sorte qu'il est impossible d'éviter la méthode hypothétique et les inconvénients qui lui sont propres. Il est encore à remarquer que le recensement d'une population demande la collaboration d'une foule de fonctionnaires, et qu'ainsi le recueil et la mise en ordre des données ne se feront pas sans donner lieu à des erreurs.

En dehors de ce qui vient d'être dit, il y a de tout autres facteurs nuisibles à la régularité dans les résultats d'une statistique de mortalité se rapportant à une population. Bien que la période d'observation habituelle de dix ans soit assez petite, toutes sortes de maladies épidémiques attaqueront de manière inégale les différentes classes d'âge. Des perturbations sont encore amenées par les accidents de circulation à issue fatale. En règle générale, on peut dire que chaque décade offre un ensemble de causes capricieuses, qui influent différemment la régularité dans la mortalité de population. Pour le constater, il n'est pas nécessaire de comprendre parmi ces causes un fléau comme la guerre, une catastrophe comme l'effondrement économique d'un état, et d'autres événements de nature à bouleverser un pays tout entier.

Enfin, les anomalies constatées dans l'allure des fréquences de mortalité peuvent être l'effet du hasard. Ceci est tellement évident qu'il est inutile d'insister. Rappelons seulement que les classes d'âges peu occupés éprouvent tout spécialement l'influence de cette source d'erreurs.

Il est clair que les tables fournies par la clientèle d'une Compagnie, ou par l'ensemble des données de plusieurs Compagnies, montreront également des variations brusques, de manière plus accentuée même, en raison du fait que leur matériel est plus restreint que celui portant sur une population toute entière. S'il est vrai que les renseignements inexacts, et la mise en ordre défectueuse, ne seront guère à redouter ici, il ne faut pas oublier, d'autre part, les perturbations causées par un certain nombre de facteurs particulièrement efficaces; sous ce rapport il convient de citer surtout: les phénomènes de sélection soit de la part de la Compagnie, soit de la part des assurés; les variations dans la composition du portefeuille, et d'autres causes analogues, dont l'influence sur l'allure des fréquences de mortalité est très forte. Pas besoin de dire que les erreurs accidentelles jouent ici, comme partout d'ailleurs, un rôle des plus importants. En résumé: le matériel d'observation dont les Compagnies d'assurances disposent est certainement plus homogène que celui fourni par une population entière; d'un autre côté, il fait juger ce matériel trop restreint pour oser affirmer que les actions d'un grand nombre de facteurs aléatoires se compensent suffisamment.

Nous voyons donc qu'une série de fréquences de mortalité tirées directement des éléments observés, est entachée d'une juxtaposition d'erreurs, en partie accidentelles, en partie amenées par la méthode de calcul employée, et par l'impossibilité pratique d'obtenir la perfection dans les opérations préalables. Inutile de dire que les irrégularités provoquées par des causes particulières n'appartiennent pas à la catégorie des erreurs d'observation.

En ce qui concerne la méthode à choisir pour l'ajustement des fréquences brutes, demandons-nous d'abord ce qu'on espère atteindre au moyen d'une telle méthode.

Si le statisticien démographe passe à un ajustement, il se propose d'approcher autant que possible l'allure vraie de la mortalité. Les méthodes graphiques et mécaniques se prêtent mal à la réalisation de son désir. En effet, elles sont toutes plus ou moins arbitraires et tiennent insuffisamment compte des poids qu'il convient d'attribuer aux observations. Une méthode mixte, graphique et mécanique, est dans le même cas. C'est pour cette raison que plusieurs auteurs préfèrent les méthodes analytiques, notamment celle des moindres carrés. Nous allons examiner si une semblable préférence se laisse fonder légitimement.

Les procédés d'ajustement analytique ont ceci de particulier qu'ils choisissent à l'avance une fonction mathématique exprimant q_x au moyen de x et d'un certain nombre de paramètres. Il est évident que le choix d'une telle fonction dépend de l'idée que le statisticien s'est faite, à priori, de l'allure des fréquences ajustées ou, en d'autres termes, ce choix sera empreinte de subjectivité, présentera une large part d'arbitraire. C'est pour cette raison que nous déclarons que les méthodes analytiques n'échappent, pas plus que les autres méthodes, à l'objection d'être arbitraire. Les méthodes analytiques reviennent en somme à calculer les paramètres de manière telle que les résultats d'observation se plient autant que possible à la fonction jugée à l'avance propre à traduire la loi de mortalité.

Il n'est peut-être pas inutile de souligner que la solution obtenue par une méthode comme celle des moindres carrés, quoique bien déterminée, n'est qu'approchée. Soit par exemple la formule très employée de GOMPERTZ-MAKEHAM:

$$p_x = s g^{c^x(c-1)}$$

La méthode des moindres carrés conduit à un seul système de valeurs pour les trois paramètres s, g et c; mais il n'est pas permis de voir dans l'expression ci-dessus, après substitution des valeurs fournies par le calcul, la représentation exacte d'une „loi de mortalité". On peut l'adopter tout au plus comme image approchée d'une telle loi. La formule de GOMPERTZ-MAKEHAM ne se prête d'ailleurs pas à refléter les empreintes particulières qu'une série d'observations reçoit toujours de l'action de causes agissant avec intensité, mais toutes de faible durée. En effet, les courbes traduisant la formule en question n'offrent qu'un seul point d'inflexion dans la région où elles sont utilisables, c'est à dire à partir de 20 ans environ.

Il y a un autre point qui suscite des difficultés. Les méthodes analytiques d'ajustement supposent toutes les erreurs accidentelles. En statistique démographique, il est extrêmement difficile, sinon impossible, d'éliminer préalablement les irrégularités non accidentelles et c'est ainsi que les méthodes analytiques font entrer dans le calcul des éléments qui devraient, par suite de leur caractère plus ou moins systématiques, rester en dehors des opérations. Un point essentiel de la théorie des erreurs consiste à pondérer les observations, mais dans le cas d'erreurs systématiques traitées comme accidentelles, affecter chaque valeur observée d'un certain poids, ne peut qu'augmenter l'inexactitude. Il importe aussi d'attirer l'attention sur les irrégularités qui constituent en réalité des traits typiques du phénomène étudié. Il est évident que les irrégularités de cette espèce, auxquelles la dénomination d'erreur ne convient pas du tout, rendent l'application des méthodes analytiques particulièrement dangereuses.

Il résulte de ce qui précède que l'application des méthodes analytiques soulèvent, en matière de statistique démographique, de sérieuses objections. Il nous semble inadmissible de les déclarer, du moins en thèse générale, préférables aux autres méthodes. La statistique démographique néerlandaise, qui peut invoquer une expérience d'un siècle environ, a renoncé aux méthodes qui impliquent l'idée que les observations relatives à la mortalité se prêtent aux procédés basés sur la théorie des erreurs. Nous nous en réjouissons [1]).

Inutile de dire que dans les cas où il s'agit simplement, sans viser à la précision, de substituer à une série de valeurs approchées d'une grandeur, une suite d'allure plus régulière, nos préférences vont sans hésiter vers une méthode graphique ou une méthode mécanique peu compliquée.

Dans le domaine de l'assurance sur la vie, la question de l'ajustement des tables de mortalité a pris l'aspect d'un problème de premier plan. Il n'en serait certainement pas ainsi, si rien d'autre que le souci de voir les primes et les réserves présenter une allure régulière n'eût guidé les actuaires. Or, c'est dans l'idée que les fréquences de mortalité se laissent interpréter comme des probabilités mathématiques, qu'il faut chercher l'origine de la richesse que la science actuarielle nous offre en méthodes d'ajustement, sans exception belles et théoriquement exactes.

Nous sommes d'avis que ses nombreuses recherches théoriques

---

[1]) Voir *Statistique des Pays-Bas*, no. 367. *Recensement* 31 *décembre* 1920. *Tables de mortalité pour la période* 1910—1920 par Prof. Dr. J. J. A. Muller (La Haye, 1923); p. VI—VII.

profitent peu aux Compagnies d'assurances sur la vie. Lorsqu'une Compagnie calcule ses tarifs pour les assurances en cas de décès au moyen d'une table de population, elle aura généralement soin d'ajuster cette table; mais un procédé purement analytique nous semble mal choisi pour atteindre le but visé. Tout d'abord, faisons remarquer que les objections développées ci-dessus, ne perdent rien de leur vigueur dans le cas présent. Ensuite, il importe de ne pas oublier qu'un groupe de vies sélectionnées ne saurait fournir une image fidèle d'une population entière. A quoi sert-il de poursuivre dans l'ajustement un haut degré d'exactitude, alors qu'il est certain, à priori, que l'allure réelle de la mortalité, loin de coïncider avec celle de la table choisie, s'en écartera au contraire dans un sens favorable à la Compagnie? De plus, on n'ignore pas que le procédé choisi pour l'ajustement n'exerce qu'une influence minime sur les primes et les réserves, du moins dans le cas où les opérations ne déplacent pas trop les résultats d'observation dans une seule et même direction. Enfin, le taux de capitalisation et le chargement des primes pures constituent deux éléments dont l'évaluation ne peut se faire que fort grossièrement. Exiger formellement une table de mortalité de haute précision — condition impossible à remplir — et faire d'autre part une base de discussion des marges à demander au taux de capitalisation et aux chargements de toute nature, n'est-ce pas manquer de logique? Mais, objecteront les partisans des vues doctrinaires, ce que vous condamnez si sévèrement, nous semble au contraire tout à fait rationnel, car il est inadmissible que la mortalité constitue une source de bénéfices. Erreur! En effet, lorsqu'on tient à ne pas mettre en danger la sécurité de l'entreprise, il est de toute nécessité d'adopter une table accusant une mortalité plus rapide que celle révélée par la statistique.

Nous pensons avoir montré suffisamment que plus que la statistique officielle, les Compagnies doivent prêter l'oreille aux objections faites à l'adresse des méthodes analytiques d'ajustement. Nous recommandons par suite spécialement aux assureurs les méthodes graphiques et mécaniques. Nous comprenons toutefois qu'un ajustement suivant la loi de GOMPERTZ-MAKEHAM se laisse motiver dans le cas d'une table employée pour une forme d'assurance sur plusieurs têtes. En effet, en pareil cas, il suffit de faire intervenir seulement 4 valeurs de q_x dans le calcul des constantes, et le calculateur peut s'arranger de manière que la sécurité obtienne sa part. Remarquons en passant que les opérations laissent ainsi place à l'arbitraire et que le qualificatif d'analytique s'applique mal à une méthode de calcul non tout à fait objective.

Il est de toute évidence que notre critique s'applique à fortiori dans le cas d'une table reposant sur les données fournies par la clientèle d'une Compagnie. Qui est bien pénétré du fait que la mortalité est très sujette à variation, n'éprouvera d'aucune façon le besoin d'opérer minutieusement, lorsqu'il s'agit d'ajuster une table sortie d'une expérience embrassant une période étendue. Ajoutons que les tables de sélection offrent, sous le rapport de l'ajustement, des difficultés d'un caractère spécial. Leur ajustement constitue un problème extrêmement ardu.

Plus que l'ajustement analytique des tables de mortalité, le problème du risque a su captiver l'intérêt des chercheurs. On peut dire, sans exagération, que pas peu de penseurs voient dans ce problème la partie la plus importante de la science actuarielle.

D'une façon générale, la théorie du risque se propose de donner à l'assureur le moyen de calculer la valeur du fonds de garantie, destiné à le préserver des pertes qui peuvent résulter des écarts entre la réalité et les bases choisies [1]). Le fonds de garantie doit être conçu comme un complément nécessaire des réserves mathématiques et offre par suite un tout autre caractère que la réserve pour fluctuations de cours et que d'autres analogues.

Parmi les trois bases fondamentales de l'industrie des assurances sur la vie, deux, à savoir le taux de capitalisation et les frais d'exploitation, sont sujettes à des fluctuations qui ne se prêtent guère à un traitement théorique. Il est vrai que certains auteurs se sont efforcés de mettre en formules la variabilité du taux de capitalisation; mais il est évident que de telles tentatives, quoique admirables à plusieurs égards, ne peuvent conduire à des résultats pratiquement utilisables [2]).

Quant à la troisième base, la table de mortalité, elle se présente

---

[1]) Voir E. Czuber: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, l.c. II Band, p. 411.

[2]) Cf. par exemple F. H. Rusting: *Die Grundformeln für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einen unbekannten Zinsfuss.* Het Verzekerings-Archief, jrg. XV (1934), p. (26)—(43).

apparemment sous un jour plus favorable. Il suffit cependant de regarder les choses de plus près, pour s'apercevoir de l'impossibilité d'imposer silence à la critique. Les calculs doivent, nous l'avons déjà dit, porter exclusivement sur des erreurs accidentelles. Or, l'assureur ne dispose jamais de tables exemptes d'erreurs systématiques. Au contraire, celles-ci jouent même un rôle prépondérant, et c'est à cause de cela, que l'emploi du calcul des probabilités mérite d'être condamné. S'adresser, malgré ce jugement défavorable, à cette branche des mathématiques, n'est-ce pas créer un édifice que la pratique renverse aussitôt? Inutile de dire qu'un fonds de garantie, reposant sur des bases si peu solides, offre une utilité pratique presque nulle. Au surplus, nous avons déjà constaté, au quatrième chapitre, que même des tables idéales, c'est à dire exemptes d'erreurs systématiques, ne sauraient donner lieu à des probabilités vraiment mathématiques.

Les objections que nous venons de présenter se rapportent toutes aux bases choisies. En dehors de celles-là, il en existe une d'un autre genre. En effet, il est à observer que la théorie du risque laisse nécessairement de côté la question fort importante des placements. L'expérience des dernières décades ont montré, abondamment, que les pertes de ce chef peuvent être considérables. Aussi le fonds pour fluctuations accidentelles de la mortalité („Sterblichkeitsschwankungsfonds") ne représente-t-il qu'un capital fort petit à côté de ceux réclamés par les autres réserves de nature spéciale. Pour s'en convaincre, il suffit de consulter les bilans des Compagnies. Nous concevons sans peine que plus d'un professionnel des mathématiques appliquées, voie, dans un capital de valeur si faible, une quantité à négliger.

Puisque les tables idéales paraissent d'une réalisation impossible, nous nous proposons de rechercher, sommairement, l'influence que l'emploi d'une table offrant une surmortalité très prononcée, exerce sur la théorie. Cette fois nous nous plaçons, bien entendu, au point de vue de ceux qui considèrent les probabilités de décès comme des probabilités mathématiques.

Pour mener à bien la tâche que nous nous sommes imposée, il convient naturellement de choisir le théorème de BERNOULLI comme point de départ. C'est en effet le théorème fondamental de toutes les recherches qui impliquent la notion de probabilité mathématique.

Soit alors q la probabilité mathématique d'un événement E et p la probabilité complémentaire de q. Si m représente le nombre de fois que l'événement E arrivera dans une série de s épreuves, la probabilité de l'inégalité:

$$m < qs + \gamma \sqrt{2spq}$$

sera :

$$\tfrac{1}{2}\left[1 + \Theta(\gamma)\right]$$

Donnons maintenant à q une valeur plus forte, soit $q + \varepsilon$. L'expression :

$$\frac{1}{2}\left[1 + \Theta\left(\frac{s\varepsilon}{\sqrt{2spq}}\right)\right]$$

traduit ensuite la probabilité que l'événement arrivera, dans une série de s épreuves, un nombre de fois plus petit que le nombre „prévu". Si s augmente indéfiniment, ε demeurant constant, la probabilité que nous venons d'écrire tend vers l'unité.

Plaçons-nous dans le cas d'une maison de jeu qui s'engage à payer un capital C, chaque fois que l'événement E se réalise. Le banquier devra fixer l'enjeu de chaque participant à :

$$J = (q + \varepsilon)\, C$$

et il s'exposera ainsi à un risque absolu R tel que :

$$R = \frac{C}{\sqrt{2\pi spq}} \int_{s\varepsilon}^{\infty} (x - s\varepsilon)\, e^{-\frac{x^2}{2spq}}\, dx$$

ou :

$$R = C\left[\sqrt{\frac{spq}{2\pi}}\, e^{-\frac{s\varepsilon^2}{2pq}} - \frac{s\varepsilon}{2}\left\{1 - \Theta\left(\frac{s\varepsilon}{\sqrt{2spq}}\right)\right\}\right]$$

Dans le cas d'un jeu équitable la valeur de R sera évidemment plus élevée. Nous aurons alors :

$$R_0 = C\sqrt{\frac{spq}{2\pi}}$$

Pour une valeur déterminée de q et une valeur pas trop petite de s la fonction R décroît rapidement lorsque ε augmente. Le tableau donné ci-dessous, qui suppose $q = 0{,}003$, $p = 0{,}997$ et $C = 1$, fournit une image frappante de la rapidité de cette décroissance.

ε \ s	1.000	2.500	5.000	10.000	25.000	50.000	100.000
0,0000	0,690	1,091	1,543	2,182	3,450	4,879	6,900
0,0001	0,641	0,970	1,306	1,718	2,343	2,781	3,022
0,0002	0,595	0,859	1,094	1,326	1,511	1,425	1,060
0,0003	0 550	0,757	0,907	1,002	0,922	0,649	0,290
0,0004	0,508	0,663	0,745	0,741	0,530	0,261	0,061
0,0005	0,469	0,578	0,604	0,535	0,287	0,092	0,010
0,0006	0,431	0,501	0,485	0,377	0,145	0,028	0,001
0,0007	0,396	0,432	0,385	0,260	0,069	0,008	$0{,}0^{3}1$
0,0008	0,362	0 370	0,302	0.174	0,031	0,002	$0{,}0^{5}4$
0.0009	0,331	0,316	0,234	0,114	0,012	$0{,}0^{3}4$	$0{,}0^{6}2$
0,0010	0,302	0,268	0,179	0,073	0,005	$0{,}0^{4}4$	$0{,}0^{8}2$

Ce qui précède met clairement en relief que le risque de l'assureur diminue notablement lorsqu'on calcule les primes à l'aide d'une table offrant de la marge. Remarquons qu'un taux de capitalisation choisi avec prudence agit dans le même sens. Les initiés n'ignorent pas que les bonis résultant d'un taux inférieur au taux réel sont employés grandement à augmenter les garanties offertes par les Compagnies. Bon nombre de ces institutions doivent leur prospérité surtout à la permanence de pareils bonis.

Si le lecteur veut bien se reporter au quatrième chapitre, suivant lequel les faits de mortalité sont régis plutôt par le schéma de LEXIS—POISSON que par celui de BERNOULLI, il accordera sans peine que la situation de l'assureur offre une sécurité dépassant ce que le calcul de tout à l'heure fait présumer. En effet, nous avons mis en évidence qu'une suite de fréquences de mortalité se rapportant soit à la totalité, soit à une partie seulement, d'une population entière, se laisse toujours concevoir sous la forme d'une matrice. La variabilité dans le sens horizontal traduit alors l'intensité avec laquelle les diverses parties de la population résistent à la mort; tandis que la variabilité dans le sens vertical fait voir dans quelle *mesure la mortalité se trouve liée au temps.* Dans le cas où le risque envisagé porte sur un seul exercice, il n'y a évidemment les variations dans le sens horizontal qui comptent. Cela étant, il suffit de faire appel au théorème de POISSON pour voir que l'écart moyen quadratique ou, ce qui revient au même, le risque est inférieur à celui calculé à l'aide du schéma de BERNOULLI. Semblable conclusion n'est plus valable dès qu'on envisage le risque couru pendant une période de plus longue durée; mais nous croyons que l'assureur ne s'en souciera guère, puisqu'il est d'usage de limiter la durée de chaque exercice à une seule année.

Il apparaît donc que le fonds pour fluctuations de la mortalité n'offre qu'une signification purement théorique, et par suite nulle en ce qui concerne la pratique même des assurances sur la vie. Si l'on s'avisait de n'employer en pratique rien que le théorème de BERNOULLI — attitude à la rigueur admissible — l'inconvénient que les fréquences de la mortalité réelle nous demeurent inconnues ne serait pas supprimé pour cela.

Rien d'étonnant dès lors à ce que le choeur des voix exaltant l'utilité de la théorie du risque laisse percer également des voix moins enthousiastes. Bien plus, la critique adressée à l'emploi de cette théorie dans le domaine des assurances a résisté jusqu'à présent victorieusement à toutes les atteintes.

Deux d'entre les Congrès internationaux d'actuaires, à savoir celui de Vienne (1909) et celui de Stockholm (1930), ont inscrit le problème du risque dans leur programme. Il suffit de comparer les rédactions que ces deux Congrès ont données respectivement du point proposé, pour se rendre compte du changement survenu dans la manière de concevoir la question de l'utilité pratique que la théorie du risque présente pour l'industrie des assurances sur la vie. Voici d'abord la rédaction donnée dans le programme de Vienne [1]):

---

[1]) *Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des Sechsten Internationalen Kongresses für Versicherungs-Wissenschaft* (Wien, 1909). I Band: Diskussions-Themen; erste Hälfte, p. VIII.

„Sont à examiner les méthodes d'évaluation des pertes auxquelles on peut s'attendre dans les opérations d'assurances, dont les bases sont exactes tant au point de vue du calcul que de la statistique, et pour lesquelles néanmoins l'arrivée des sinistres peut présenter des divergences avec les prévisions (risque mathématique); comment tenir compte des résultats de cette théorie pour l'evaluation du montant des réserves de garantie à constituer par les institutions d'assurances et par les caisses de retraite".

Le Congrès de Stockholm s'exprime en termes moins positifs [1]):

„Les parties les plus abstraites de la théorie actuarielle ne sont point encore fixées, d'une façon définitive. Il y a même controverse sur la nature du fondement métaphysique à donner à cette théorie. Les uns n'admettent, en effet, d'autre traitement que celui qui s'appuie logiquement sur le postulat d'une probabilité à priori, tandis que les autres préfèrent un traitement plus libre et reposant sur une base empirique. Les opinions diffèrent aussi sur la question de savoir si, du point de vue des applications pratiques, ces parties „supérieures" de notre science ont quelque valeur. Ceux qui répondent par la négative sont d'avis qu'un traitement exclusivement théorique, fut-il inattaquable, ne saurait donner de direction utile en ce qui concerne la réassurance et la constitution des réserves de risque. Quoi qu'il en soit, nous estimons que ces questions méritent de figurer encore au programme des Congrès actuariels. Bien qu'il soit extrêmement ardu d'exprimer de façon précise ce point du programme, nous avons rédigé les propositions suivantes:

La pratique de l'assurance sur la vie, peut-elle espérer quelque avantage de recherches théoriques soit sur le risque mathématique soit sur d'autres questions analogues? Les méthodes habituelles de réassurance et de la constitution des réserves de risque, sont-elles insuffisantes pour éliminer les effets inconvénients des fluctuations de mortalité?"

On voit que la manière de concevoir le problème qui nous occupe s'est transformée du tout au tout dans un espace de vingt ans environ. D'enthousiaste, elle est devenue assez sceptique. Il va de soi que ce changement d'attitude s'est répercuté dans les mémoires présentés. On peut dire que pour élucider le problème du risque, les mémoires du Congrès de Vienne réservent en général plus de place aux développements mathématiques que ceux du Congrès de Stockholm.

En 1909, le mémoire d'ALTENBURGER fut seul à mettre en relief les dangers qui peuvent résulter pour l'assurance sur la vie d'une

---

[1]) *Comptes Rendus du neuvième Congrès international d'actuaires* (Uppsala, 1931). Tome II, Rapport D, p. 205, 206.

association trop étroite de la théorie et de la pratique [1]). Il fit remarquer notamment que le programme avait le tort de parler, dans son énoncé de la question relative au risque, de la possibilité d'employer des bases exactes. Et c'est avec une certaine satisfaction qu'il ajouta que la prospérité de mainte Compagnie est due à la création de réserves spéciales dépassant le fonds calculé une dizaine de fois et même plus.

A Stockholm la critique prit une tournure moins parcimonieuse. GRUDER y développa une théorie élémentaire qui ramenait le problème du risque à quelques équations fondamentales se prêtant bien aux applications [2]). Il finit cependant par reconnaître le bien fondé de mainte objection faite à sa théorie. Le mémoire d'un autre congressiste, de SCHÖNWIESE [3]), voit dans la théorie du risque une conception fausse des bases fondamentales de la science actuarielle. On comprend qu'une pareille sentence implique la condamnation de la théorie quant à son utilité pratique. ALTENBURGER vit ses idées partagées par DUMAS, l'actuaire suisse bien connu [4]). Celui-ci a déclaré les faits de mortalité incompatibles avec les théorèmes de BERNOULLI et de POISSON, parce que ces faits sont loin, surtout pendant les temps de guerre et d'épidémie, de réaliser l'indépendance réclamée par les deux théorèmes en question. Même en possession de théorèmes ne demandant pas l'indépendance, l'actuaire se trouverait peu avancé, car les données statistiques le renseignant sur le degré de cette dépendance lui feraient certainement défaut.

Le mémoire le plus étendu sur le risque mathématique s'attache au nom de BOHLMANN [5]). Cet auteur a pris soin d'illustrer son étude de nombreux tableaux numériques. Ceci procure au lecteur

---

[1]) J. Altenburger: *Das Problem des mathematischen Risikos; die Sicherheitsreserven bei Versicherungsanstalten.* Gutachten, et caetera. L.c. I Band, zweite Hälfte, p. 957—964.

[2]) O. Gruder: *Zur Theorie des Risikos.* Comptes Rendus, et caetera. L.c. Tome II, Rapport D, p. 222—253.

[3]) R. Schönwiese: *Das Problem des Risikos.* Ibid. p. 207—221.

[4]) S. Dumas: *Le problème du risque.* Ibid. p. 402—407.

[5]) G. Bohlmann: *Die Theorie des mittleren Risikos in der Lebensversicherung.* Gutachten, et caetera. L.c. I Band, erste Hälfte, p. 593—683.

l'avantage de pouvoir mettre la valeur du fonds de risque en parallèle avec celle des réserves mathématiques proprement dites.

Bohlmann débute par la remarque habituelle que la théorie du risque se propose de rechercher l'influence que l'équilibre financier d'une Compagnie éprouve des fluctuations accidentelles de la mortalité. Comme unité de mesure il choisit le risque moyen, parce qu'il voit dans cette grandeur le meilleur moyen de déterminer le risque d'un ensemble d'opérations en partant des risques des opérations chacune prise à part. Nous pouvons nous dispenser de discuter ni la prédilection de Bohlmann pour le risque moyen, ni la valeur des développements mathématiques donnés par lui. Ce qui nous intéresse, c'est le résultat auquel il aboutit et dans lequel nous trouvons des données suffisantes pour comparer la marche du fonds pour fluctuations de la mortalité avec celle des réserves mathématiques.

Après avoir calculé le risque moyen d'une assurance isolée, Bohlmann applique le résultat trouvé au calcul du risque couru par une Compagnie dont le portefeuille se compose exclusivement de contrats d'assurance mixte. Il suppose que les contractants concluent tous au début d'une année déterminée et que chacun d'eux compte alors 35 ans. Le capital assuré est fixé uniformément à mille francs. Bohlmann envisage successivement trois cas, selon que l'époque d'expiration tombe 20 ans, 25 ans, ou $\omega - x$ ans. aprés le moment de conclure. Comme table de mortalité, il prend la table américaine très en vogue à l'époque où il composait son travail. Les calculs reposent sur un taux de capitalisation de 3 %. Le coefficient de sécurité est fixé à 3, de sorte que la valeur du fonds pour fluctuations de la mortalité vaut 3 fois celle du risque moyen. Nous avons réuni quelques-uns des chiffres calculés par Bohlmann dans le tableau qui figure à la page suivante. Ils se rapportent à l'époque où 5 ans se sont écoulés depuis l'origine des contrats.

Ce tableau fait ressortir que les résultats obtenus par Bohlmann ne doivent pas nous inquiéter. La situation réelle est même telle que l'on peut, sans se rendre coupable d'exagération, considérer le fonds pour fluctuations de la mortalité comme négligeable vis-à-vis des capitaux destinés à couvrir les autres risques auxquels une Compagnie doit faire face.

En premier lieu, les résultats établis par BOHLMANN ne traduisent pas, nous semble-t-il, l'aspect normal des choses. Les calculs de cet actuaire supposent l'emploi d'une table de mortalité idéale. Or pareille table ne se rencontre pas en pratique. Autrement dit: les faits

Nombre des assurés encore en vie	Valeur du fonds pour fluctuations de la mortalité exprimée en tant pour cent des réserves mathématiques, selon que le risque se rapporte : à toute la durée future de l'assurance.			à la sixième année de l'assurance.		
	($n=20$)	($n=25$)	($n=\infty$)	($n=20$)	($n=25$)	($n=\infty$)
1.000	8,50	14,33	43,32	3,78	5,55	12,20
2.500	5,38	9,06	27,40	2,39	3,51	7,72
5.000	3,80	6,41	19,37	1,69	2,48	5,46
10.000	2,69	4,53	13,70	1,19	1,76	3,86
25.000	1,70	2,87	8,67	0,76	1,11	2,44
50.000	1,20	2,03	6,13	0,53	0,78	1,73
100.000	0,85	1,43	4,33	0,38	0,55	1,22

de mortalité donnent toujours lieu à des écarts de nature systématique. La prudence recommande aux Compagnies de faire en sorte que ces écarts soient à leur avantage. Elles choisissent, de propos délibéré, des fréquences à coup sûr fort éloignées de celles qui seraient conformes à une table idéale. Les fréquences employées par BOHLMANN demandent ainsi à être majorées. Mais, nous l'avons vu à la page 97, l'introduction de fréquences plus fortes entraîne un risque moindre et, conséquemment, une réduction du fonds pour fluctuations de la mortalité. Au surplus, le travail de BOHLMANN se rapporte à un portefeuille d'une simplicité outrée, envisage un cas beaucoup moins compliqué que ceux rencontrés en pratique. Adapter le procédé de l'actuaire allemand au portefeuille d'une entreprise réellement existante, ce serait une tâche extrêmement difficile, sinon impossible.

Voici un autre point qui mérite l'attention. Comme BOHLMANN l'a fait remarquer lui-même, ses calculs laissent de côté les sources de profits. Une Compagnie bien gérée aura soin, nous avons déjà eu l'occasion de l'affirmer, de destiner les gains réalisés de ce chef à l'augmentation de son actif, de manière que ses réserves libres rendent en somme la création d'un fonds pour fluctuations de la mortalité superflue.

Il suit de tout ce qui précède que le calcul du risque mathématique est dénué d'utilité pratique dans le cas d'une Compagnie d'assurances sur la vie. Ceux qui pensent qu'en matière d'assurance le risque mathématique se laisse calculer avec un degré de précision acceptable — ce qui paraît au contraire fort douteux — sont conduits à déterminer un fonds pour fluctuations de la mortalité dont la grandeur ne signifie quasi rien relativement aux réserves qu'une Compagnie bien dirigée doit posséder en dehors de ses réserves mathématiques.

En terminant, nous tenons à déclarer que nous ne sommes pas insensibles à la beauté de la théorie du risque. Bien au contraire, nous l'admirons. Mais le beau et l'utile ne sont nullement identiques, et ce qui nous charme menace souvent de nous entraîner trop loin. Les théories scientifiques ne font point exception. Il faut toujours confronter théorie et possibilité pratique. La théorie du risque part de prémisses qui compromettent son utilité en matière d'assurances sur la vie. C'est pour cette raison que nous souscrivons pleinement à l'opinion d'ALTENBURGER: il est inadmissible de s'adresser, dans l'évaluation des supra-réserves nécessaires, à des principes théoriques dont le fondement se laisse renverser par une critique logique.

CHAPITRE VII.

CONCLUSIONS.

Après avoir donné dans ce qui précède une esquisse comparative des principes de la théorie de l'assurance sur la vie et de la notion de probabilité mathématique, il nous semble désirable de présenter quelques conclusions pour résumer les résultats auxquels nous sommes parvenus.

Notre première conclusion est qu'il faut renoncer à l'idée qui voit dans la mathématique des assurances sur la vie une théorie indissolublement liée au calcul des probabilités. Ce point de vue découle déjà irréfutablement de ce que les fréquences de mortalité ne répondent pas aux conditions précises dont nous avons cru devoir entourer, au troisième chapitre, la notion de probabilité mathématique; il s'impose cependant surtout à notre esprit depuis le moment où nous avons acquis la conviction que l'assureur a non seulement la liberté, mais encore le devoir d'opérer avec des fréquences majorées.

Bon nombre de ceux qui adhèrent à la thèse incriminée par nous trouveront vraisemblablement que nous nous enfermons dans une attitude trop radicale. Assurément, nous ne nous dissimulons pas du tout que notre point de vue s'écarte totalement de l'opinion courante, qui voit dans le calcul des probabilités le seul garant d'une théorie vraiment mathématique de l'assurance sur la vie; nous ne pouvons nous empêcher toutefois de penser que l'opinion tacite de plusieurs de nos confrères s'achemine vers celle qui a notre pleine et entière adhésion. C'est sans aucune réserve que nous souscrivons aux idées de WAGNER, d'ENGLUND et de NEVANLINNA, reproduites brièvement dans notre aperçu historique, bien que les arguments avancés par ces auteurs diffèrent souvent des nôtres. Du reste, nous n'avons pas négligé de citer d'autres auteurs qui professent, de manière plus ou moins ouverte, essentiellement les mêmes vues critiques que nous.

Si l'on venait nous dire que repousser le calcul des probabilités revient à bâtir la théorie actuarielle, et par suite l'industrie des assurances sur la vie, sur le sable, nous répondrions que pareille objection n'est pas de nature à nous impressionner. En effet, dans notre argumentation en faveur d'une théorie mathématique non basée sur le calcul des probabilités, la stabilité des entreprises figure au premier rang. Il est sans doute vrai qu'une stabilité suffisante peut s'obtenir déjà au moyen d'un taux de capitalisation offrant beaucoup de marge. Nous préférons toutefois faire concourir la base mortalité au même but. Les idées de certains auteurs vont à l'encontre d'une semblable façon d'agir. Messieurs MAINGIE et MAURICE sont de ceux-là. Ils recommandent l'emploi de tables qui soient, autant que possible, la représentation exacte de la mortalité et vont même jusqu'à déclarer qu'il est pour l'assureur de l'honnêteté la plus élémentaire de ne rien gagner sous le rapport de la mortalité [1]). A la vérité, il nous échappe pourquoi les bénéfices de mortalité seraient contraires aux préceptes de la morale. En tous cas, nous jugeons pareils bénéfices parfaitement légitimes, autant que les Compagnies les destinent à consolider leurs entreprises, notamment à faire face aux pertes à redouter d'une période de mortalité surélevée.

Dans notre exposé nous n'avons parlé qu'incidemment de l'assurance maladie et de l'assurance invalidité. Il va de soi que nos conclusions se maintiennent, mutatis mutandis, à l'égard de ces deux branches. A fortiori même! En effet, en ce qui concerne la maladie et l'invalidité, les données statistiques méritant confiance sont très rares. Il faut reconnaître aussi que l'influence que la conduite de l'assuré sur la réalisation des sinistres joue ici un rôle particulièrement important et qu'ainsi la prudence dans le choix des bases se recommande encore plus impérieusement que dans le cas de l'assurance sur la vie.

Il nous semble opportun, maintenant que nous parlons de l'assurance maladie et de l'assurance invalidité, de reprendre la question de la notation. Le prochain Congrès d'actuaires, qui aura lieu à Paris en 1937, s'occupera de nouveau de la notation universelle et, à en juger d'après les pronostics, les Congressistes envisageront également l'extension de cette notation au domaine de l'assurance invalidité. Les actuaires qui ne rejettent pas la thèse défendue par nous, regretteront sans doute l'adoption éventuelle d'une extension mo-

---

1) *Les opérations viagères*, l.c. p. 74.

delée sur la notation actuellement existante. En effet, un prolongement de la notation actuelle aboutirait à la confection d'un tableau étendu de symboles pour les probabilités dites probabilités d'invalidité. Agir de la sorte reviendrait à persévérer dans la voie déplorable qui voit dans la mathématique des assurances une application des jeux de hasard. La notation actuelle est le résultat d'un processus historique et nullement le fruit d'une décision de principe quant aux assises qu'il convient de donner à une théorie mathématique des assurances sur la vie. Espérons que le Congrès de 1937 aura soin de se prononcer catégoriquement sur ce point fondamental avant d'aborder la question même des symboles!

Voici encore une remarque d'ordre général. Le développement et la prospérité des Compagnies sont trop souvent cités pour donner un témoignage sans réplique de l'efficacité de l'emploi du calcul des probabilités en matière d'assurances sur la vie. Nous sommes d'avis que cet argument ne porte pas. Malgré leur attitude sceptique vis-à-vis du calcul des probabilités, plusieurs Compagnies sont arrivées à la prospérité.

Notons finalement que c'est à dessein que nous avons donné un exposé où l'appareil mathématique occupe une place secondaire. Sans doute, il serait facile de reproduire les démonstrations habituelles, avec tout leur bagage mathématique, et de déduire ensuite des résultats obtenus quelques contradictions trouvant leur source dans l'assimilation d'une fréquence de mortalité à une probabilité mathématique. Si nous n'avons pas procédé de la sorte, c'est qu'une démonstration par l'absurde a l'inconvénient de convaincre l'esprit sans l'éclairer. Or, les questions qui se rapportent aux principes mêmes d'une science demandent toujours qu'on s'efforce d'arriver à une forte mise en lumière.

INDEX

STELLINGEN

I.

De ontwikkeling van de actuarieele theorie op kansrekenkundigen grondslag is niet alleen in strijd met oorsprong en karakter van een sterftetafel, doch bovendien een miskenning van de idee van levensverzekering.

II.

Iedere wijziging of uitbreiding van de universeele notatie voor de levensverzekeringswiskunde, waarbij aan het gebruik van kanssymbolen wordt vastgehouden, is te veroordeelen.

III.

De gangbare opvatting, die o.a. door CZUBER aldus wordt omschreven, dat kansgetallen de „Erwartungsbildung" regelen, is onjuist.

E. CZUBER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.* I Band, vierte Auflage (Leipzig und Berlin, 1924); p. 140.

IV.

Een normale dispersie geeft nog geen waarborg, dat het betreffende statistische verschijnsel door een vaste kans wordt gekarakteriseerd.

V.

In theorie kan een mechanische of een graphische operatie voor de afronding van sterftetafels niet achtergesteld worden bij de toepassing van de methode der kleinste kwadraten.

VI.

Een afdoend criterium voor de verwijdering van twijfelachtige waarnemingen bestaat niet en kan ook nimmer opgesteld worden.

E. CZUBER: *Theorie der Beobachtungsfehler* (Leipzig, 1891); p. 211—231.

VII.

Het door VON MISES ontwikkelde kansbegrip is niet oorspronkelijk, doch het resultaat van een historisch proces, hetwelk de verwijdering van het subjectieve element in de klassieke definitie door middel van een empirischen grondslag der kansrekening trachtte te bereiken.

VIII.

Er bestaat behoefte aan een Gereformeerd-theologische behandeling van de statistiek in het algemeen en van het contingentiebegrip in het bijzonder.

IX.

De opinie van ENESTRÖM, dat JOHAN DE WITT in het derde „praesuppoost" van zijn *Waerdye van Lyfrenten Naer proportie van Losrenten* andere kansgetallen heeft verwerkt dan in zijn becijfering, spruit uit misverstand voort.

Vgl. mijn artikel *De Witt's Waerdye van Lyfrenten, in modern Nederlandsch overgebracht en toegelicht.* De Levensverzekering; jrg. XI, p. 138 en 141.

X.

Het door BOREL geleverde bewijs voor de „Wohlordnung" van een willekeurige verzameling is waardeloos.

E. BOREL: *Leçons sur la théorie des fonctions.* Troisième édition (Paris, 1928); p. 148, 149.

XI.

De classificatie van HARDY betreffende de orden van oneindigheid is voor een niet triviale uitbreiding vatbaar.

G. H. HARDY: *Orders of infinity* (Cambridge, 1910).

XII.

De christelijke belijdenis aangaande de Goddelijke onderhouding en regeering aller dingen wordt indirect bevestigd door onderzoekingen op het gebied der nieuwere physica.

XIII.

De voorkeur voor de toestandsvergelijking van CLAUSIUS boven die van VAN DER WAALS, waarvan PLANCK blijk geeft, is ongemotiveerd.

M. PLANCK: *Thermodynamik.* Neunte Auflage (Berlin und Leipzig, 1930); p. 15—21.

XIV.

De waargenomen zonneschijn per periode dient niet alleen in uren, doch evenzeer in verhouding tot de som der astronomische daglengten te worden opgegeven.

XV.

De leer der complexe getallen behoort van het examenprogramma der scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs te worden afgevoerd.